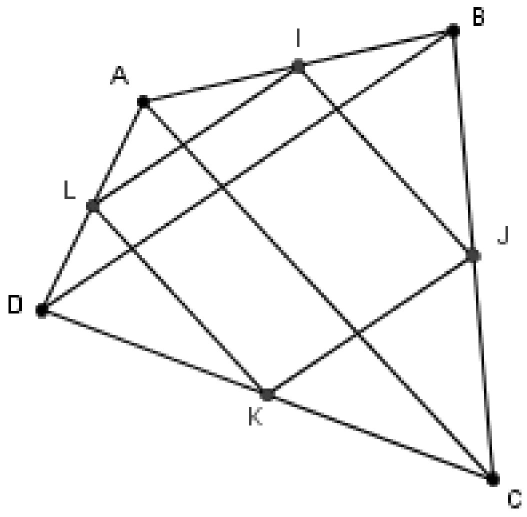
Corrigé exercice 3



1°) a) Comme I est le milieu de [AB] et J le milieu de [BC], $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$ et $\frac{BJ}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC}$**.**

Donc, d'après le théorème réciproque du théorème de Thalès, **la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).**

b) De la même manière qu'on a démontré au 1°) que (IJ) est parallèle à (AC), on peut démontrer que (LK) est parallèle à (AC). On en déduit donc que (IJ) est parallèle à (LK).

Ensuite, de la même manière qu'on a démontré, en deux temps, que (IJ) est parallèle à (LK) on peut démontrer que (IL) est parallèle à (JK) (on utilise la diagonale (DB) à la place de la diagonale (AC) dans la démonstration).

IJKL ayant ses côtés opposés deux à deux parallèles **est donc un parallélogramme**.

2°)

Question a : réponses A et C
(Si ABCD est un losange alors IJKL est toujours un parallélogramme et est toujours un rectangle).

Question b : réponses A, B, C et D.

3°)

Remarquons d'abord que si ABCD est un rectangle, ses diagonales ont même longueur donc AC = DB.

Par ailleurs, I étant le milieu de [AB] et J le milieu de [BC], on sait que
$\frac{IJ}{AC} = \frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \frac{1}{2}$ donc IJ = $\frac{AC}{2}$.

On démontre de façon analogue que IL = $\frac{DB}{2}$.

Comme AC = DB, on en déduit que IJ = IL.

On savait déjà que IJKL est un parallélogramme (voir 1°). Comme de plus IJKL a deux côtés consécutifs de même longueur, **IJKL est un losange**.

3°) a) Soit c le longueur du côté du carré initial.

Les quatre triangles rectangles isométriques AIL, BJI, CKJ et KDL ont une aire égale à
$\frac{1}{2} \times \frac{c}{2} \times \frac{c}{2}$ soit $\frac{c^2}{8}$

L'aire du quadrilatère IJKL est donc égale à $c^2 - 4 \times \frac{c^2}{8}$ soit $\frac{c^2}{2}$ C'est la moitié de l'aire a du carré initial ABCD.

Remarque : on passe du carré ABCD au carré IJKL en appliquant un coefficient de réduction égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc l'aire du carré IJKL est égale à $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ fois l'aire du carré ABCD. On retrouve bien la valeur $\frac{a}{2}$.

b) Il y a le même rapport de réduction pour passer du carré IJKL au carré MNPQ que pour passer du carré ABCD au carré IJKL.

Donc aire(MNMP) = $\frac{1}{2} \times$ aire(IJKL) = $\frac{a}{4}$