Proposition de corrigé du concours blanc n°1
IUFM d'Alsace 2008-2009

EXERCICE 1

Le but de cet exercice est de déterminer un nombre entier sachant que :

- ce nombre s'écrit avec 4 chiffres,
- il est supérieur à 7000,
- il est multiple de 45,
- il est impair,
- le chiffre des milliers est le double de celui des centaines.

Quel est ce nombre ?

Soit $\overline{mcdu}$ le nombre entier cherché.

Les indications données dans l'énoncé sont traduites par :

- $7 \leq m \leq 9$
- $\overline{mcdu}$ est multiple de 5 et $\overline{mcdu}$ est multiple de 9 (car « m est multiple de 45 » est équivalent à « m est multiple de 5 et m est multiple de 9 » puisque 5 et 9 sont premiers entre eux)
- u est « un chiffre impair »
- m = 2c

m = 2c donc m est « un chiffre pair » donc **m = 8** (car $7 \leq m \leq 9$) et donc **c = 4**

$\overline{mcdu}$ est un multiple de 5 et u est « un chiffre impair » donc **u =5**

$\overline{mcdu}$ est un multiple de 9 donc m + c + d + u c'est-à-dire 8 +4 + d + 5 est un multiple de 9 donc 17 + d est un multiple de 9. D'où la seule possibilité pour d :

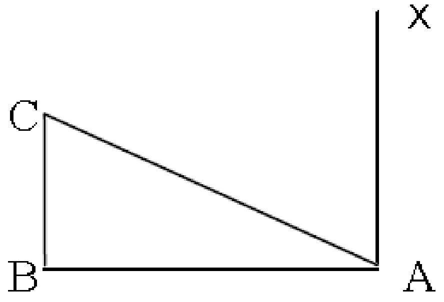
d = 1.

Le nombre cherché ne peut valoir que 8415 et il est facile de vérifier que ce nombre convient.

Conclusion : **le nombre cherché vaut 8415**.

EXERCICE 2

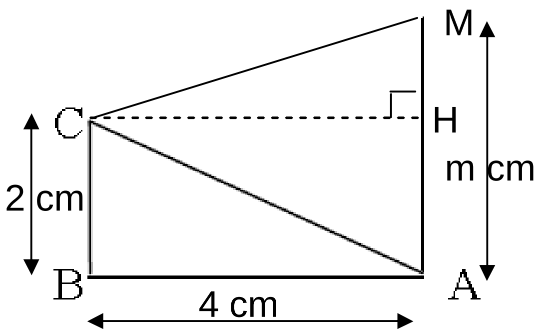
On donne le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm et BC = 2 cm.
La demi-droite [Ax) est perpendiculaire à la droite (AB) et a la même orientation que la demi-droite [BC)
M est un point de la demi-droite [Ax), et on note *m* la distance AM.
Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.



1) Calculez la distance AC.

Le triangle ABC est un triangle rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore : $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (en cm)

2) Déterminez *m* pour que l'aire du triangle ACM soit égale au triple de l'aire du triangle ABC.



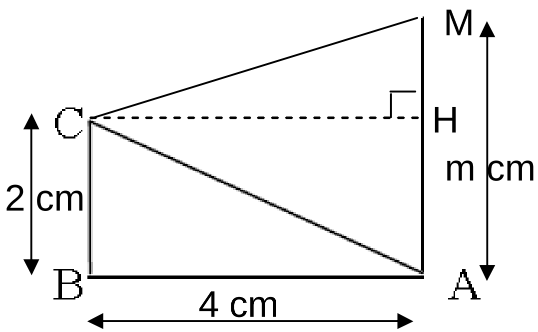
Soit H le pied de la hauteur du triangle ACM issue de C.

L'aire du triangle ACM est égale à $\frac{CH \times AM}{2}$ soit 2m (en cm² avec m en cm).

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AB \times AC}{2}$ soit $\frac{4 \times 2}{2}$ soit 4 (en cm²).

L'aire du triangle ACM est égale au triple de l'aire du triangle ABC lorsque 2m = 3 × 4 donc lorsque **m = 6 (en cm)**.

3) a) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en A.

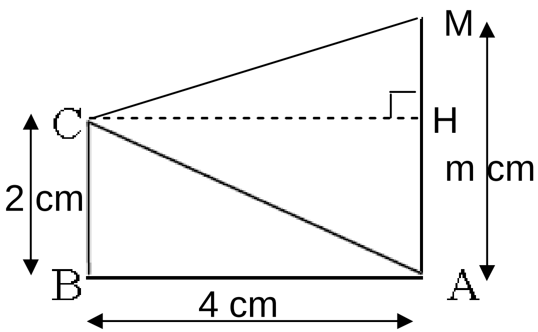


ACM est un triangle isocèle en A
lorsque AC = AM donc lorsque $m = 2\sqrt{5}$ (en cm)
car AC = $2\sqrt{5}$ (voir 1°)

b) Déterminez m pour que le triangle ACM soit isocèle en C.

Le triangle ACM est un triangle isocèle lorsque C est équidistant de A et M donc lorsque C est sur la médiatrice de [AM] donc lorsque H est le milieu de [AM].
On en déduit que le triangle ACM est isocèle lorsque AM = 2 × AH soit
AM = 2 × CB (car AH = CB puisque AHCB est un rectangle).
En définitive, le triangle ACM est isocèle lorsque m = 2 × 2 soit **m = 4 (en cm)**.

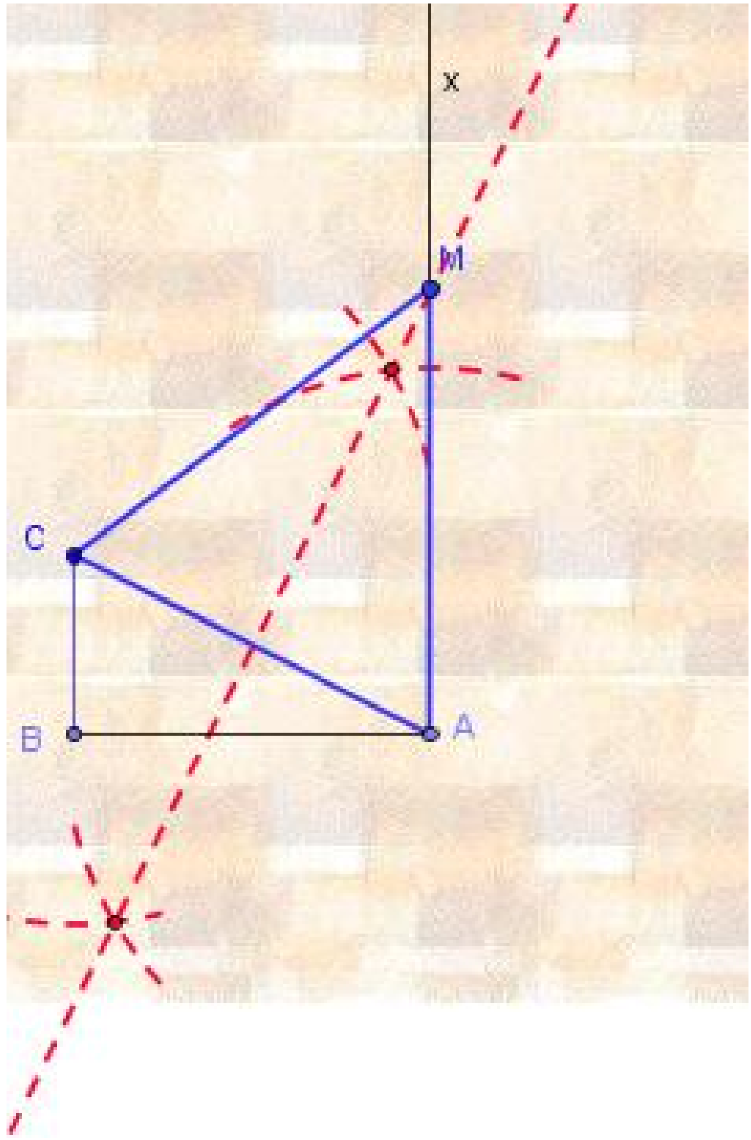
c) Le triangle ACM peut-il être isocèle en M ? Si oui, Effectuez la construction à la règle non graduée et au compas en laissant apparents les traits de construction



Le triangle ACM est isocèle de en M si et seulement si M est équidistant de A et C donc si et seulement si M est sur la médiatrice de [AC].

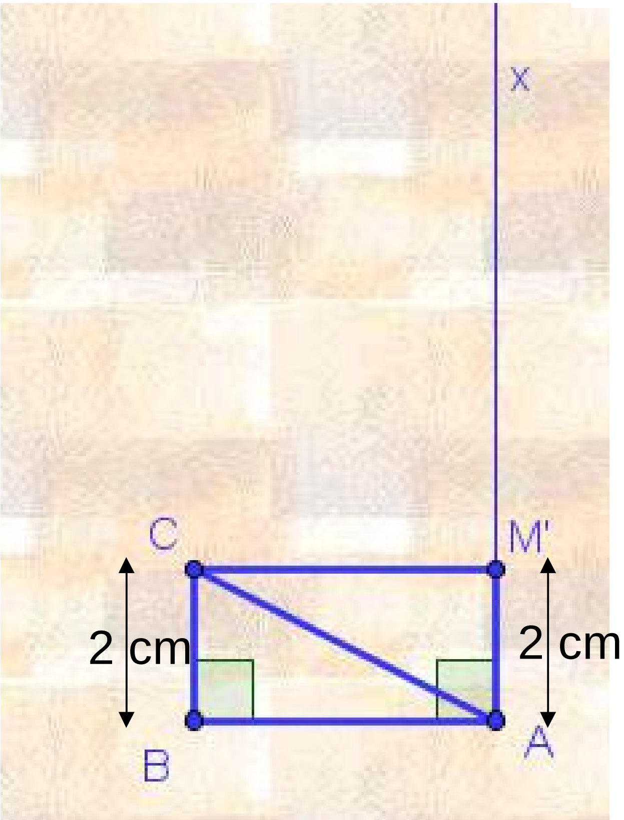
Or, il est possible de trouver un point de [Ax) qui soit sur la médiatrice de [AC]. Il suffit de construire le point d’intersection de [Ax) et de la médiatrice de [AC] qui existe car, comme [AC] n’est pas perpendiculaire à [Ax), la médiatrice de [AC] n’est pas parallèle à [Ax).

Construction :



4) a) Sur une autre figure, placez le point M' de la demi-droite [Ax) tel que AM' = 2.

Quelle est la nature du triangle ACM' ? Justifiez.



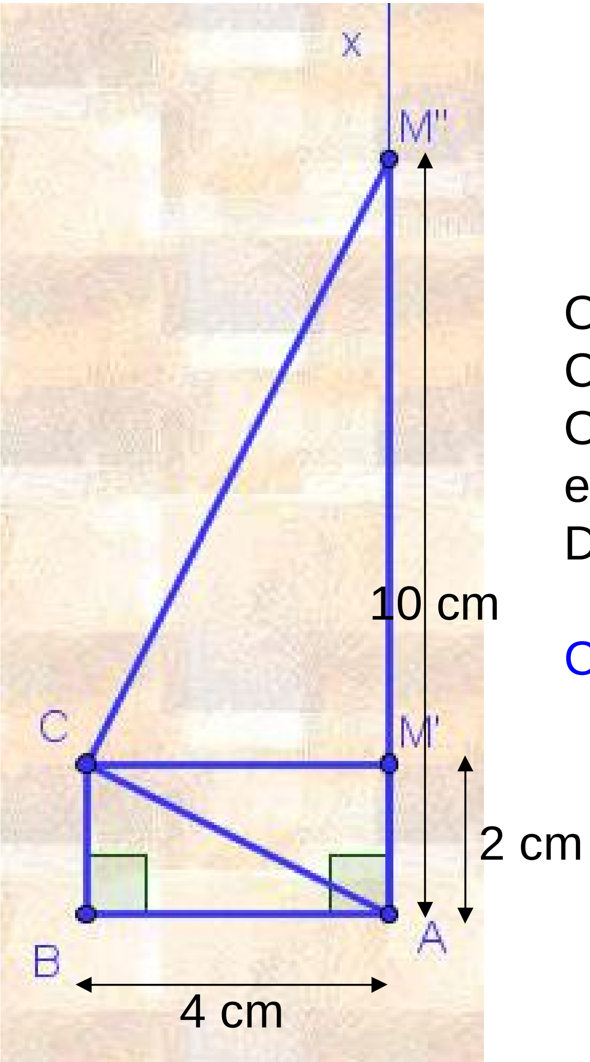
Les droites (BC) et (AM') sont parallèles parce que perpendiculaires toutes les deux à la droite (AB).

De plus BC = AM' donc le quadrilatère (non croisé) AM'CB qui a deux côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.

Comme de plus un de ses angles est droit, c'est un rectangle.

On en déduit que le triangle AM'C est un triangle rectangle en M'.

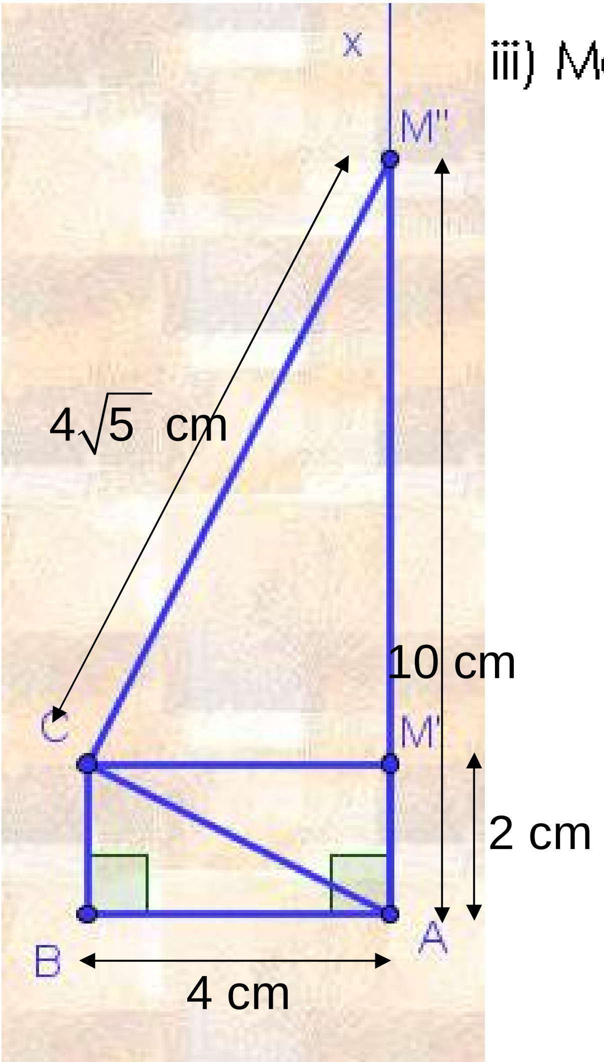
b) i) Sur la même figure, placez M'' tel que AM'' = 10.



ii) Calculez la distance CM''.

On calcule CM'' en utilisant le théorème de Pythagore :
$CM''^2 = CM'^2 + M'M''^2$.
Or, CM' = AB (car ABCM' est un rectangle)
et M''M' = AM''- AM' = 10 - 2 = 8 (en cm)
Donc : $CM''^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$.

$CM'' = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (en cm)



iii) Montrez que le triangle ACM'' est rectangle en C.

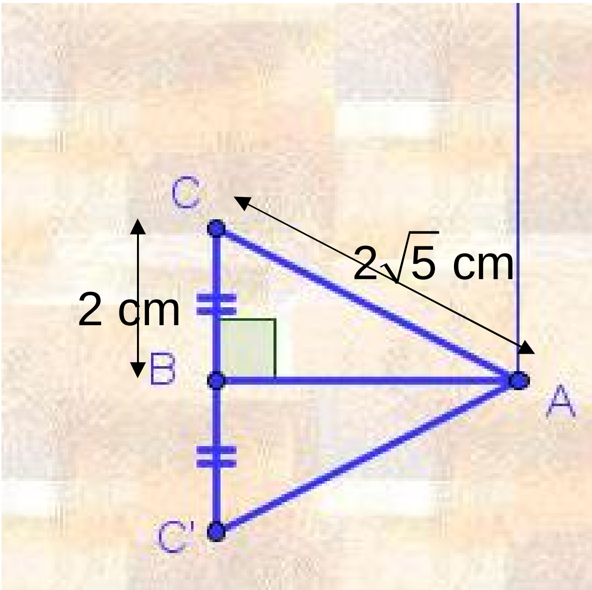
$$CM''^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

$$CA^2 = AM'^2 + M'C^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$AM''^2 = 10^2 = 100$$

Or 80 + 20 = 100 donc $CM''^2 + CA^2 = AM''^2$
donc, d'après le théorème réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle ACM'' est un triangle rectangle en C.

5) On note C’ le symétrique du point C par rapport à la droite (AB).



a) Le triangle ACC’ est-il équilatéral ? Justifiez.

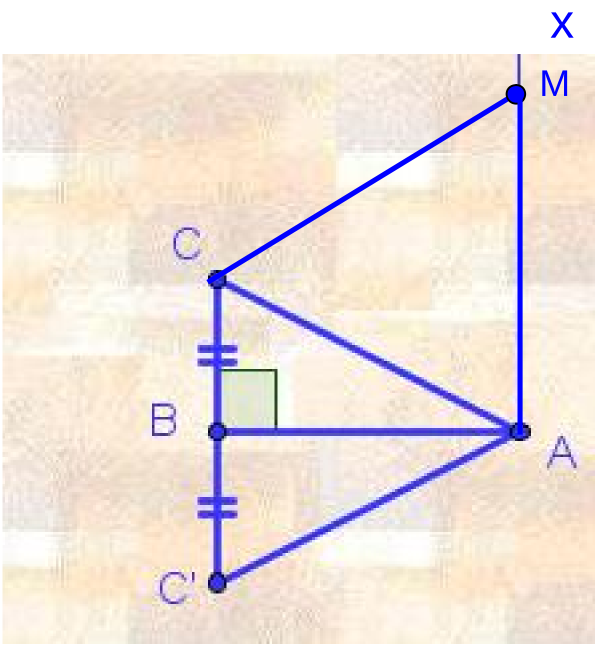
AC’ = AC (car la droite (AB) est un axe de symétrie pour le triangle ACC’).

Donc AC’ = AC = $2\sqrt{5}$ (en cm).

Par ailleurs, CC’ = 2CB = 4 (en cm).

Les trois côtés du triangle ACC’ n’ont pas même longueur donc le triangle ACC’ n’est pas un triangle équilatéral.

b) Existe-t-il un point M de la demi-droite [Ax) tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.



L’angle $\widehat{CAB}$ ne mesure pas 30° (en effet, s’il mesurait 30° alors l’angle $\widehat{CAC'}$ mesurerait 60° et le triangle CAC’ qui est déjà un triangle isocèle de sommet A serait un triangle équilatéral ce qui n’est pas le cas (voir question précédente).

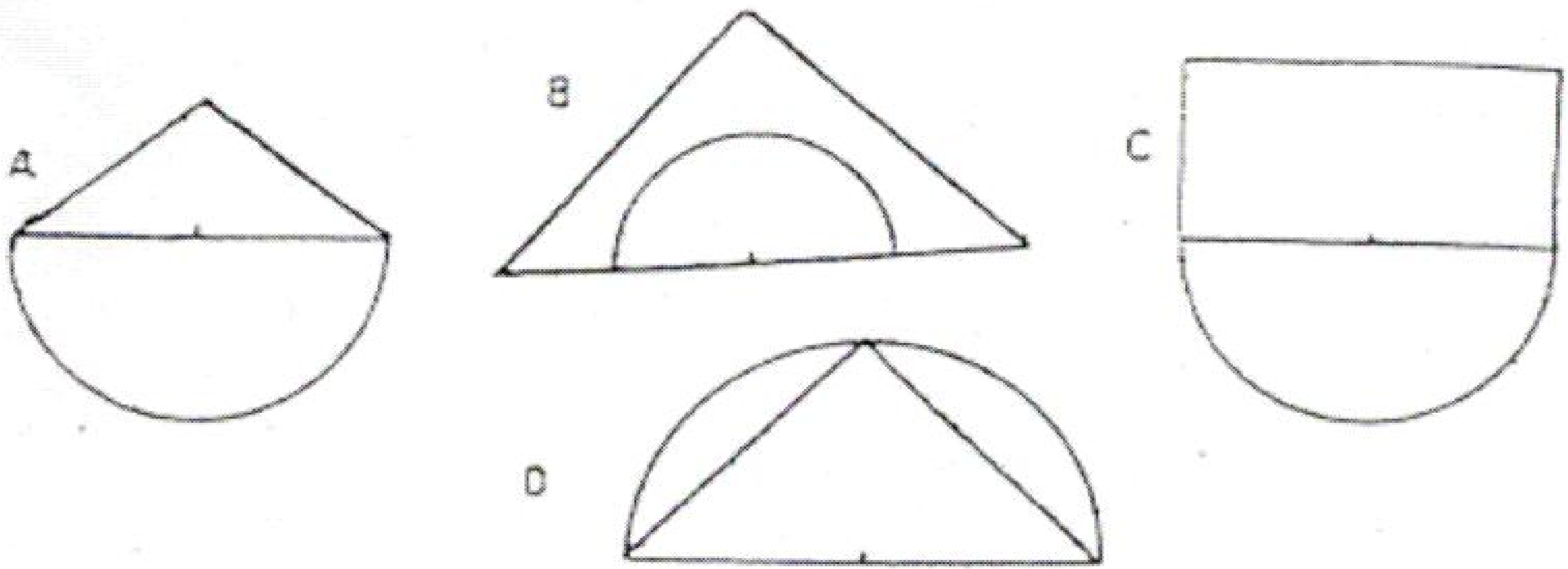
Donc l’angle $\widehat{CAM}$ ne mesure jamais 60° donc il n’existe pas de point M de la droite [Ax) tel que le triangle ACM soit équilatéral.

Question complémentaire

Voici un texte proposé par un enseignant de cycle 3 :

« *Trace un triangle : il doit être rectangle et avoir deux côtés de même longueur. Sur le grand côté du triangle, trace un demi-cercle.* »

Voici les productions de quatre enfants :



1. Cette activité s'inscrit-elle dans les exigibles du programme et des progressions 2008 ? Justifiez.

Dans le programme, on trouve sous la rubrique « Les figures planes » : le triangle et ses cas particuliers, le cercle. On trouve aussi : « L'utilisation d'instruments et de techniques : règle, équerre, compas… » et enfin : «Les problèmes….de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé. »
Dans les progressions, on trouve (CM1/CM2) : « Tracer une figure à partir d'un programme de construction ou ensuivant des consignes ».

2. Quels instruments les enfants peuvent-ils utiliser ? Précisez pour chacun l'usage qui pourrait en être fait.

règle non graduée	tracé des côtés du triangle
équerre	construction de l'angle droit
compas	obtention de côtés de même longueur construction du demi-cercle
règle graduée	obtention de côtés de même longueur

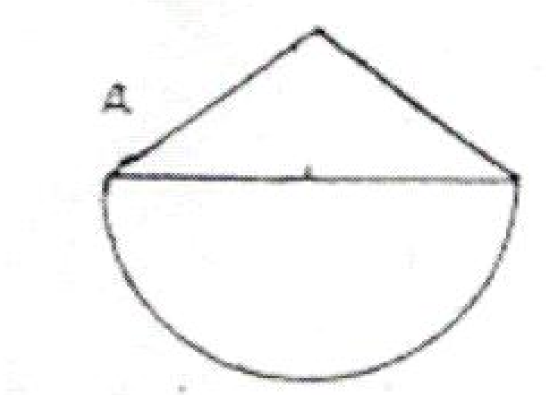
Remarque : En observant les productions d'élèves, on s'aperçoit qu'ils utilisent systématiquement le milieu du « grand côté » du triangle même si cela n'apparaît pas dans la consigne. Si on prend en compte cet élément dans la construction, on peut ajouter que ce milieu peut être trouvé soit avec la règle graduée, soit avec l'équerre car les triangles sont isocèles, soit avec le compas en traçant la médiatrice du « grand côté », mais cette notion n'est pas au programme du cycle 3.

3. Analysez rapidement chaque production d'élève en précisant celle(s) qui répond(ent) à la consigne donnée par le maître (justifiez) ?

La consigne est ambiguë : « **sur** le grand côté » peut être interprété de différentes façons. Rien n'est précisé quant au centre du demi-cercle, ni son rayon, ni dans quel demi-plan il doit se situer.

« Trace un triangle : il doit être rectangle et avoir deux côtés de même longueur. Sur le grand côté du triangle, trace un demi-cercle. »

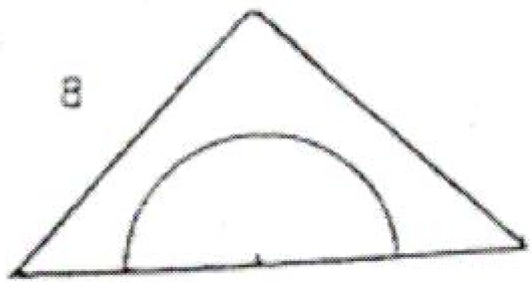
Production A :



<u>Production A</u> : l'élève ne respecte pas la consigne « il doit être rectangle » puisqu'aucun des angles de ce triangle n'est droit ; il construit toutefois un demi-cercle sur ce qui, pour son triangle, correspond au « plus grand côté ».

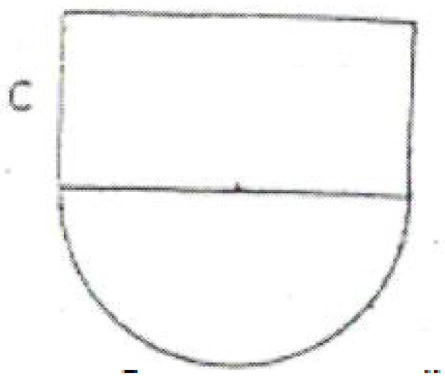
« Trace un triangle : il doit être rectangle et avoir deux côtés de même longueur. Sur le grand côté du triangle, trace un demi-cercle. »

Production B :



<u>Production B</u> : l'élève construit un triangle rectangle (aux imprécisions de l'angle droit près) et construit un demi-cercle sur le plus grand des côtés du triangle. Il respecte donc la consigne du maître (puisque le diamètre du cercle n'est pas précisé dans la consigne)

Production C :

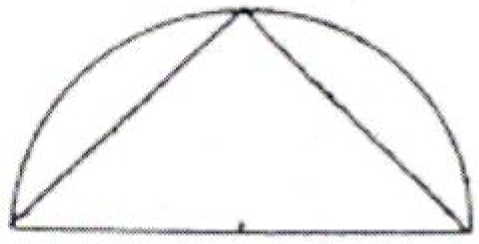


<u>Production C</u> : l'élève construit un rectangle à la place du triangle demandé ; il construit un demi-cercle sur ce qui pour lui est « le plus grand côté de son rectangle »

« Trace un triangle : il doit être rectangle et avoir deux côtés de même longueur. Sur le grand côté du triangle, trace un demi-cercle. »

Production D :

D

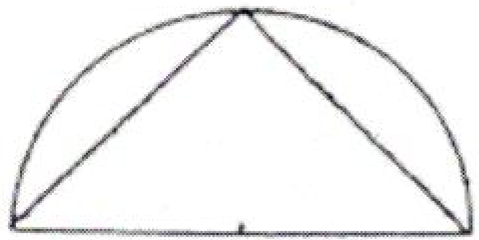


Production D : l'élève construit un triangle rectangle (aux imprécisions près) et construit bien un demi-cercle sur le côté le plus long de ce triangle ; il choisit pour diamètre du demi-cercle ce côté.

Conclusion : les seules productions qui répondent aux consignes du maître sont celles des élèves B et D.

4. Rédigez un énoncé accessible à des élèves de cycle 3 et dont la seule solution serait la construction de la figure D.

D



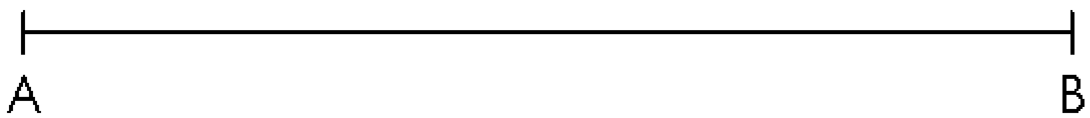
« Trace un triangle : il doit être rectangle et avoir deux côtés de même longueur.
Trace un demi-cercle passant par les trois sommets de ce triangle ; son centre est le milieu du grand côté du triangle »

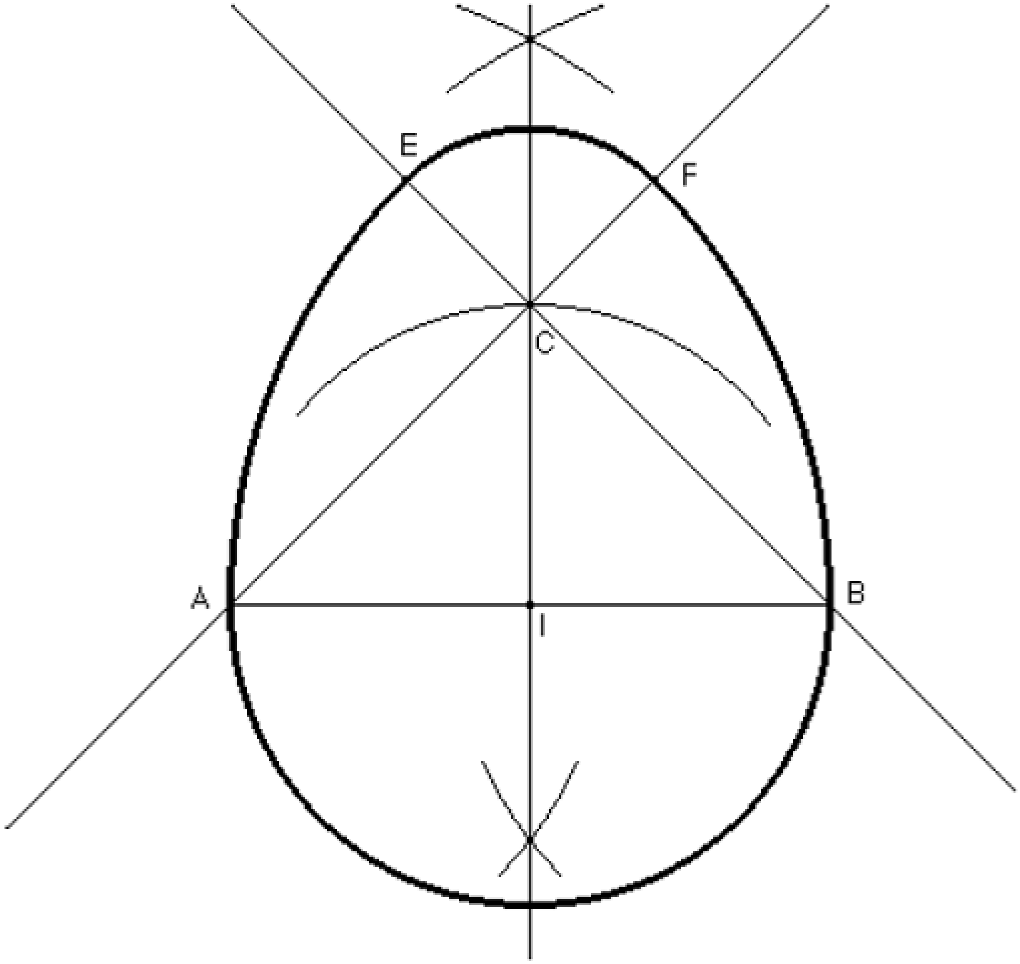
EXERCICE 3

Voici le programme de construction de l'ove.

- Soit [AB] un segment et I son milieu.
- Soit C un point de la médiatrice de [AB] tel que $IC=\frac{AB}{2}$
- Tracer le triangle ABC
- Tracer le petit arc de cercle de centre B et de rayon AB délimité par les demi-droites [BA) et [BC). Appeler E le point d'intersection de cet arc avec la droite (BC).
- De même, tracer le petit arc de cercle de centre A et de rayon AB délimité par les deux demi-droites [AB) et [AC).
- Appeler F le point d'intersection de cet arc avec la droite (AC).
- Tracer le demi-cercle de diamètre [AB] ne contenant pas C.
- Tracer l'arc de cercle EF de centre C et de rayon EC entièrement situé à l'extérieur du triangle ABC.

1) Tracer l'ove en utilisant seulement le compas et la règle non graduée. Vous laisserez les traits de construction apparents et vous prendrez pour longueur AB celle du segment ci-dessous.

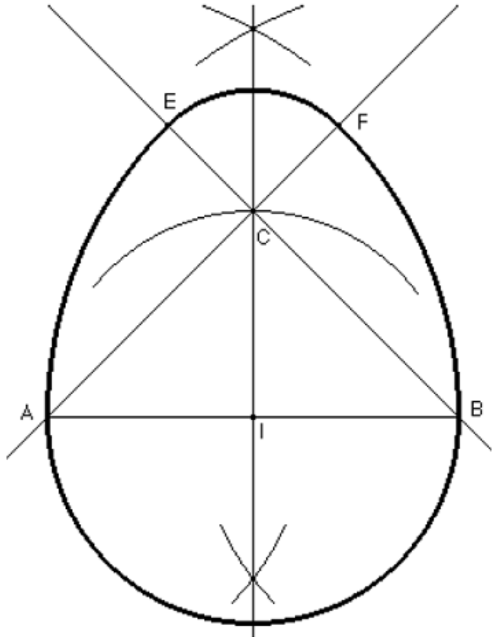




E
F
C
A
I
B

Pour les questions suivantes on prendra AB = 4cm et vous justifierez vos réponses.

2) Quelle est la nature du triangle ABC ? Calculer AC et BC.



2) ABC est un triangle isocèle et AC = BC car le point C est sur la médiatrice de [AB].

ABC est un triangle rectangle car il est inscrit dans le demi-cercle de centre I et de diamètre [AB] : en effet $IC = IA = IB = \dfrac{AB}{2}$.

Calculons AC.

<u>Première méthode :</u>

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle isocèle ABC donne la mesure de AC (mesures en cm) :

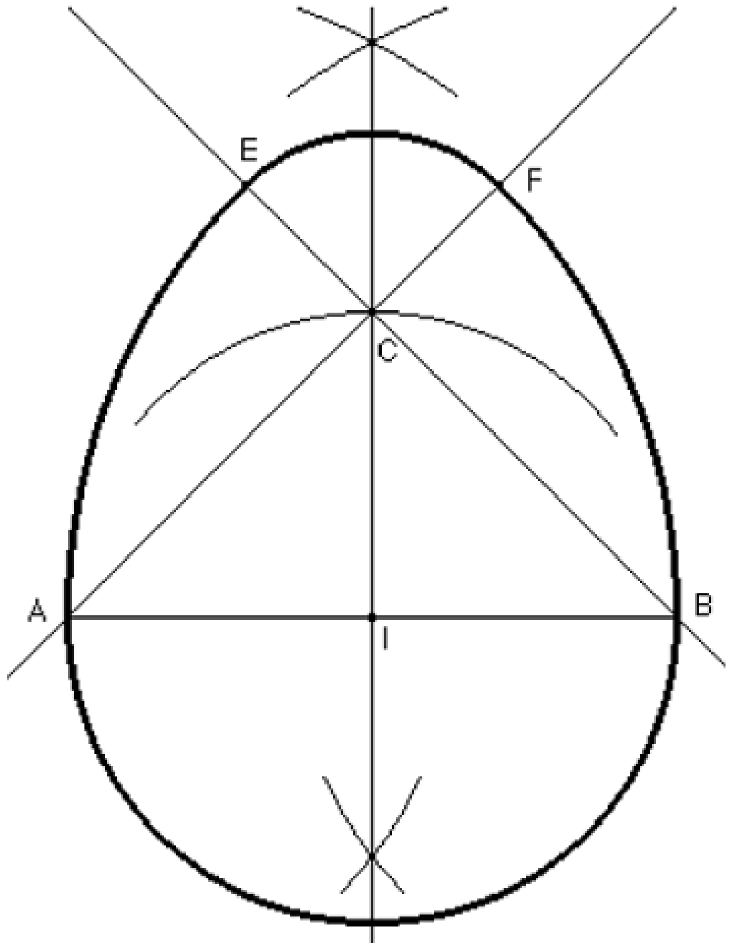
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2\ AC^2$ d'où $2\ AC^2 = 16$ d'où $AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

<u>Deuxième méthode :</u>

On peut appliquer de mémoire la relation entre la longueur du côté c d'un carré et celle de sa diagonale d : $d = c\sqrt{2}$ ou $c = (d\sqrt{2})/2$.

Donc $AC = (AB\sqrt{2})/2 = 2\sqrt{2}$

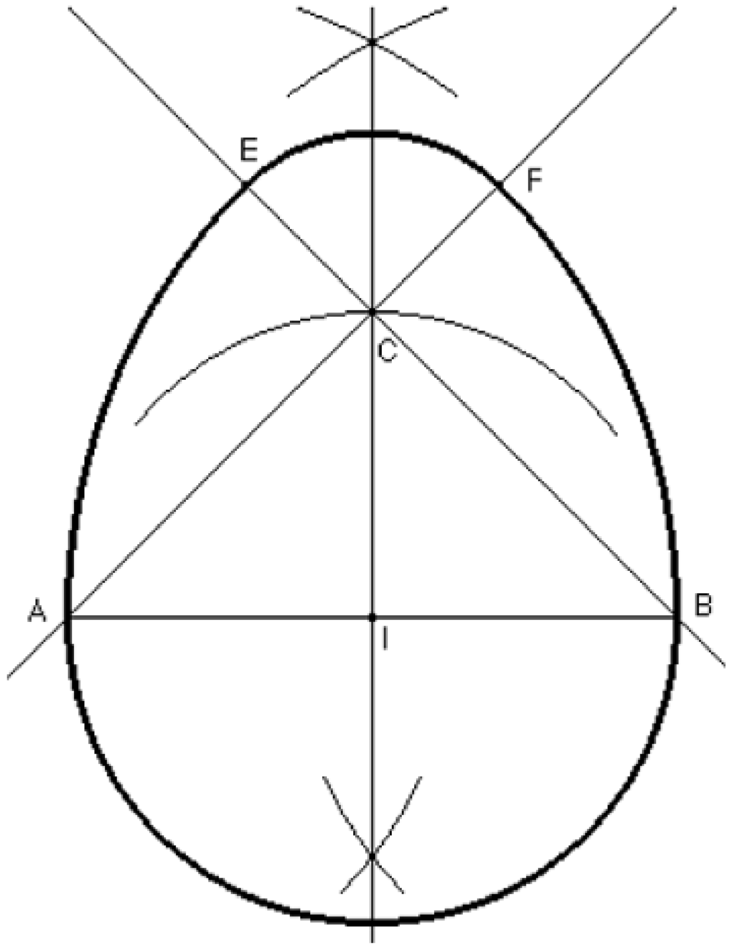
3) Quelles sont les valeurs des angles $\widehat{FCE}$, $\widehat{EBA}$, $\widehat{FAB}$?



3) $F\hat{C}E$ est l'angle opposé à $A\hat{C}B$, il mesure donc 90°.

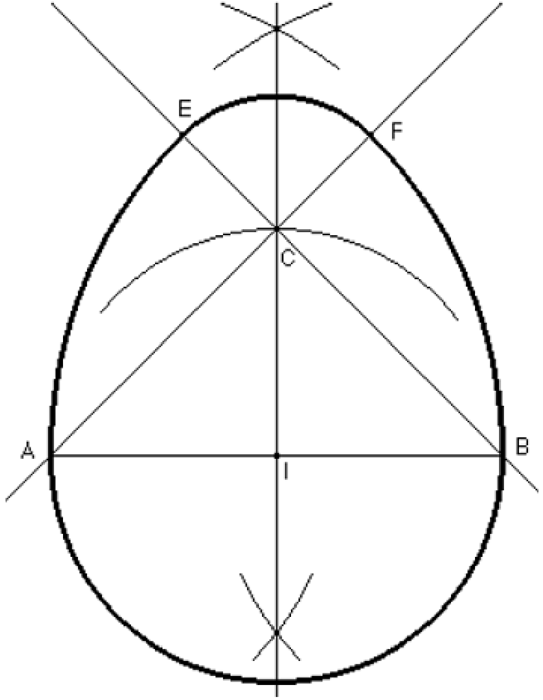
ABC est isocèle rectangle donc les angles $F\hat{A}B$ et $E\hat{B}A$ mesurent 45°.

4) Quelle est la valeur de FC ?



4) AF = AB = 4 ; les points A, C et F sont alignés dans cet ordre, donc :
$CF = AF - AC = 4 - 2\sqrt{2}$

5) Calculer le périmètre de l'ove (valeur exacte en cm)



5) Le périmètre de l'ove est constitué de 4 arcs de cercle EF, FB et AE, AB qui correspondent respectivement à $\frac{1}{4}$ de cercle de rayon CF, deux fois $\frac{45}{360}$ soit $\frac{1}{8}$ de cercle de rayon AF et un demi-cercle de rayon IB.

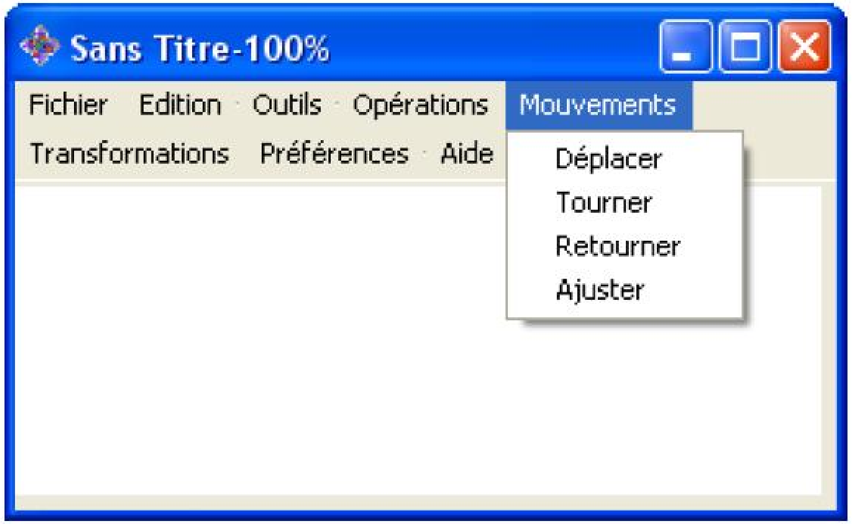
Ce qui donne pour le périmètre de l'ove :

$$\frac{1}{4} \times 2\pi\ (4 - 2\sqrt{2}) + 2 \times \frac{1}{8} \times 2\pi \times 4 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = (2 - \sqrt{2} + 2 + 2)\pi = (6 - \sqrt{2})\pi$$

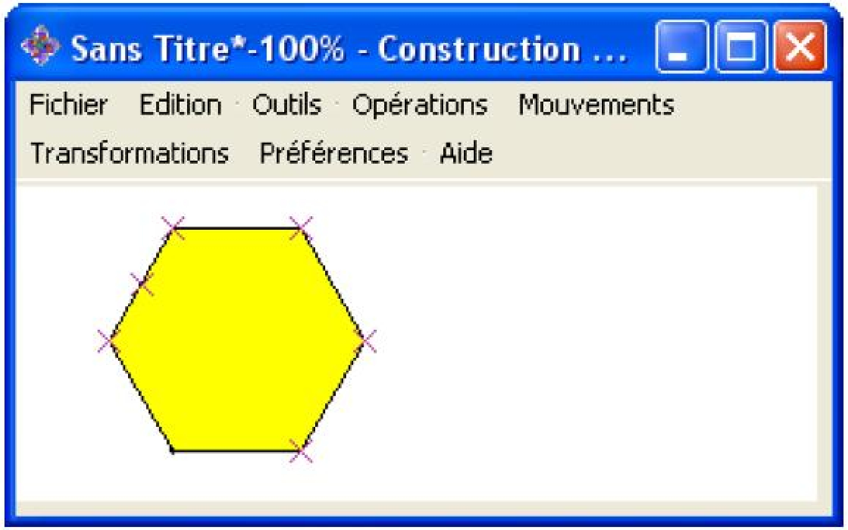
Le périmètre de l'ove a une mesure de $(6 - \sqrt{2})\pi$, l'unité de mesure étant le cm.

<u>Question complémentaire</u>

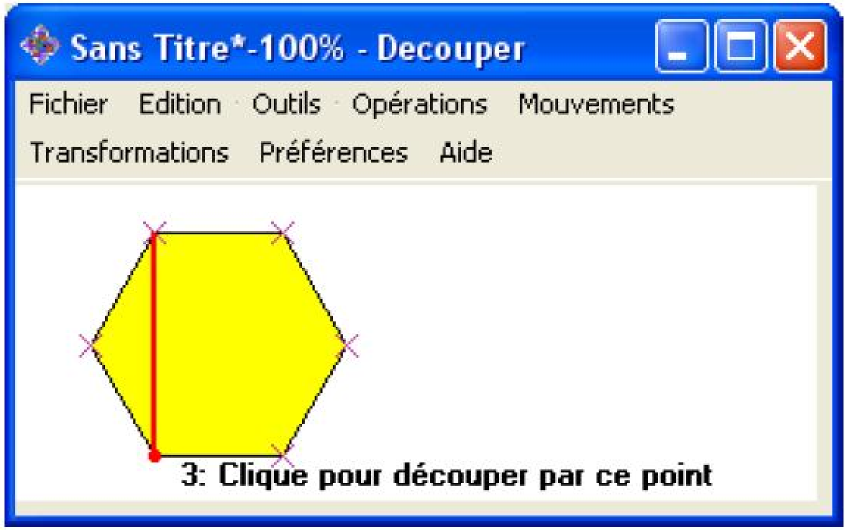
Le kit standard du logiciel de géométrie dynamique « Apprenti géomètre » permet de tracer des figures de base en un seul clic. Les dimensions sont préprogrammées et invariables. Après avoir tracé une de ces figures, un utilisateur peut agir sur cette dernière en utilisant notamment les menus **Opérations** et **Mouvements** :

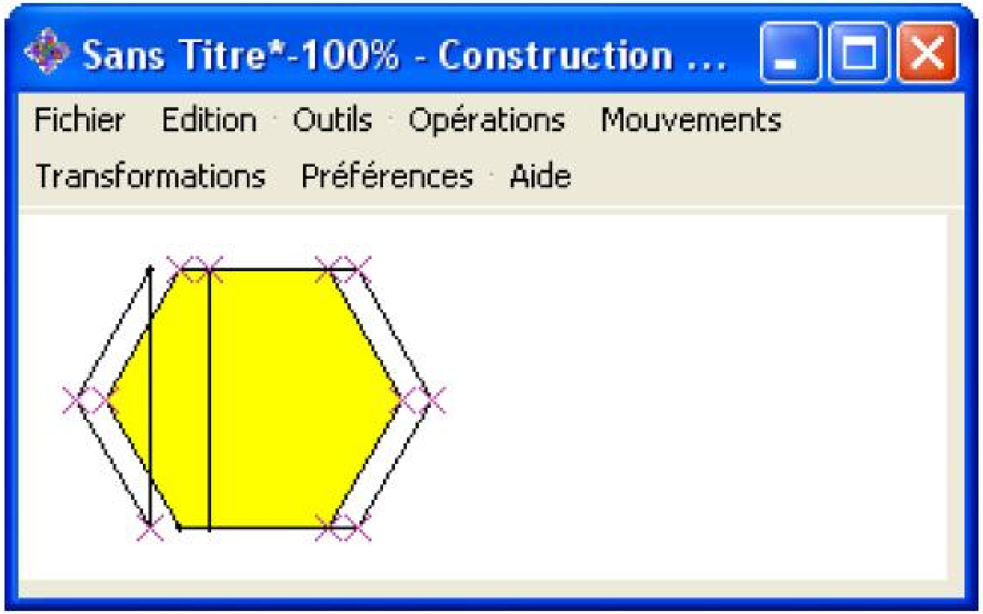


- **«Mouvements - Ajuster »** permet de rectifier les approximations du logiciel. On n'évoquera pas ce mouvement ici.
- **«Mouvements - Déplacer »** translate la figure sélectionnée (la déplace « parallèlement » à elle-même)
- **«Opération - Diviser »** permet de diviser en segments de même longueur un côté de polygone. Pour « Diviser », il convient de pointer successivement les deux sommets extrémités d'un côté du polygone. Le logiciel marque alors le ou les points de la subdivision en 2, 3 ou 5. Ci-dessous, on a obtenu le milieu d'un côté de l'hexagone en utilisant « Diviser » en 2.



- **« Opération - Découper »** sépare une figure en deux parties. La ligne de découpe doit relier deux points existants (soit des sommets, soit des points créés par subdivision) de la figure pointés successivement par l'utilisateur, ainsi qu'illustré par les trois étapes ci-dessous.



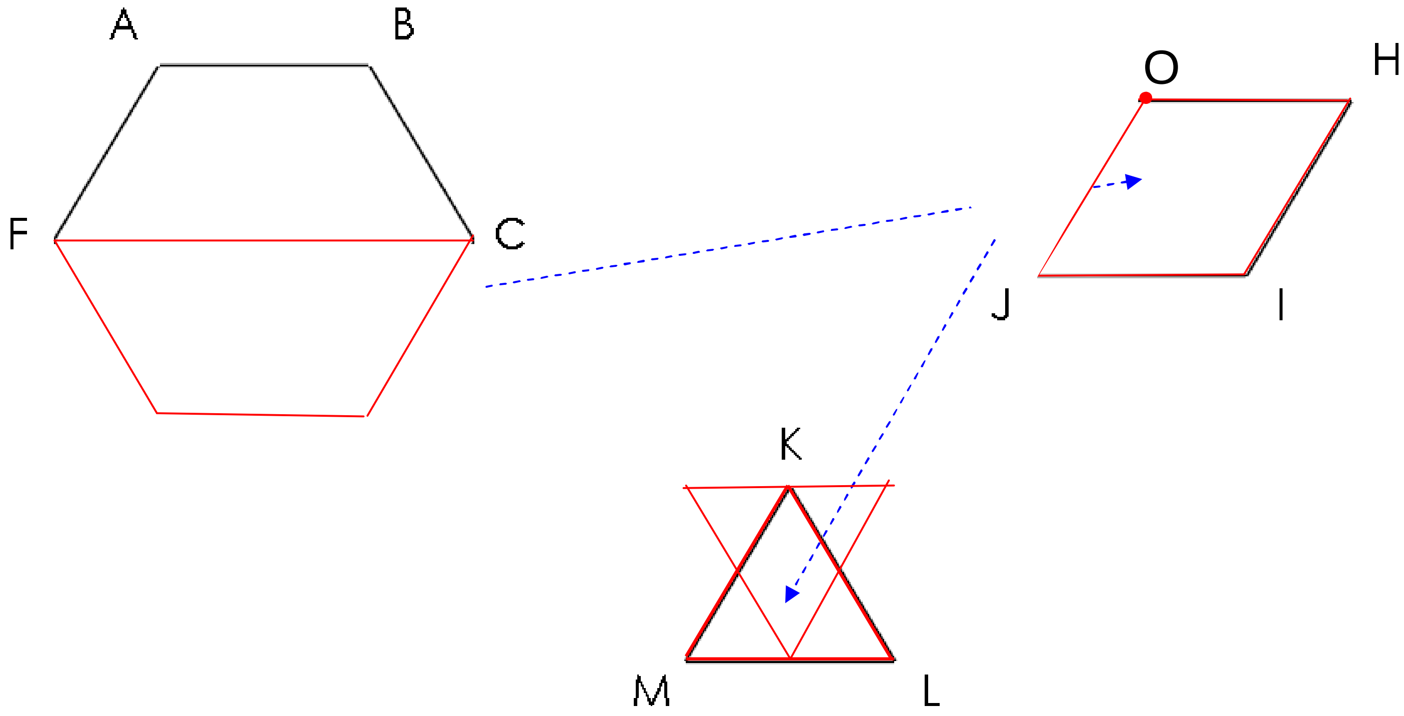


1) Emettez une hypothèse raisonnable sur la signification de chacun des mouvements « Tourner », « Retourner ».

- « Tourner » pourrait correspondre à un pivotement de la figure autour d'un point (pointé par l'utilisateur, imposé par le logiciel ?). La mesure des angles n'étant pas au programme de l'école, on peut supposer que l'angle de cette rotation est déterminé par l'action directe de l'élève sur la figure via la souris.

- « Retourner » pourrait correspondre à un retournement de la figure autour d'une droite (choisie par l'utilisateur ? imposée par le logiciel ? C'est en fait un axe vertical passant par le centre de gravité de la figure). Ce retournement est donc identifiable à une symétrie axiale.

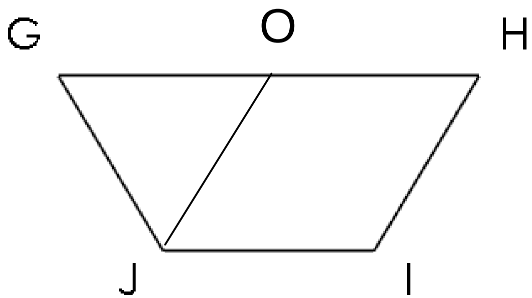
2) Un utilisateur a créé un hexagone régulier. Décrire précisément les actions à mener pour obtenir le trapèze puis le triangle équilatéral ci-dessous, à l'endroit et dans la position où ils sont.



- Trapèze : menu « Opération - Découper », pointer F comme premier point, C comme deuxième point ; menu « Mouvements – Déplacer » pour amener FCDE sur le trapèze donné.
- Triangle : à partir du trapèze GHIJ, menu « Opération – Diviser en 2 », pointer G comme premier point, H comme deuxième point ; le point O, milieu de [GH] est ainsi créé. Menu « Opération - Découper », pointer J comme premier point, O comme deuxième point, le triangle équilatéral GOJ est ainsi créé. Il conviendra d'utiliser successivement « Mouvements – Déplacer » puis « Mouvements – Tourner » pour le superposer à KLM.

3) Peut-on obtenir un losange à partir de l'hexagone dans cet environnement TICE ? Dites précisément comment justifier que la figure obtenue est bien un losange.

3. Losange : Le découpage précédent du trapèze a créé le triangle équilatéral GOJ et le quadrilatère OHIJ. Ce dernier est bien un losange car : JI = IH (côtés d'un hexagone régulier) ; JO = OH (rayon du cercle circonscrit) ; HO = HI (le côté d'un hexagone régulier a même longueur que le rayon de son cercle circonscrit).



4) A quel niveau de l'école poseriez-vous la question précédente (justifier) ?

- Le losange est explicitement mentionné au programme du cycle 3. Vérifier la nature d'une figure en utilisant les instruments apparaît dans le document « progressivité des apprentissages » au CM2. Par exemple, la construction de l'hexagone régulier à partir d'un cercle et par report du rayon sur la circonférence permet d'affirmer l'égalité des quatre côtés du quadrilatère considéré. La question peut donc être au posée en fin de cycle 3.

Dans quel objectif ?

- L'objectif peut être d'amener les élèves à admettre la nécessité de recourir à des instruments pour établir la nature d'une figure, les vérifications purement visuelles trouvant ici leur limite puisque ce losange, « posé » sur un de ses côtés, n'est pas immédiatement identifiable comme tel.

5) Proposer une activité papier / crayon sur l'hexagone qui puisse accompagner ou préparer le traitement de cette question par un élève au niveau de la scolarité considéré.

5. La construction de l'hexagone régulier à partir d'un cercle et par report du rayon sur la circonférence (voir ci-dessus).

Document réalisée par D. Pernoux à partir du corrigé proposé par R. Adjiage et B. Deronne