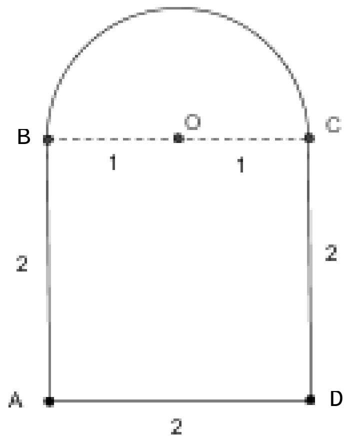
Proposition de corrigé pour le concours blanc n° 2 (IUFM d'Alsace 2008-2009)

Exercice 1

1)

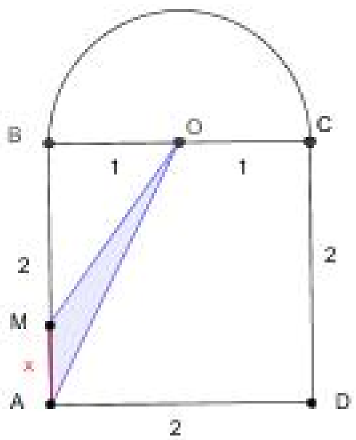


L'aire A est la somme de l'aire du carré ABCD et de l'aire du demi-disque de centre O.

D'où : $A = 4 + \frac{\pi}{2}$ (en unité d'aire)

2)

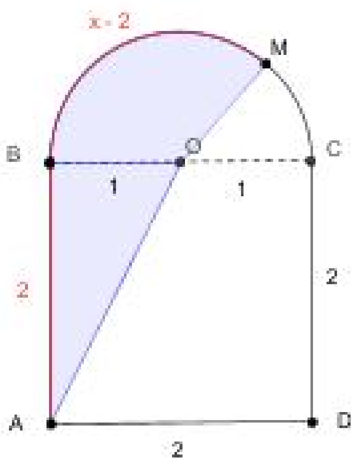
a)



L'aire A(x) est l'aire du triangle OAM.

$$A(x) = \frac{AM \times OB}{2} = \frac{x \times 1}{2} = \frac{x}{2} \text{ (en unité d'aire)}$$

b)



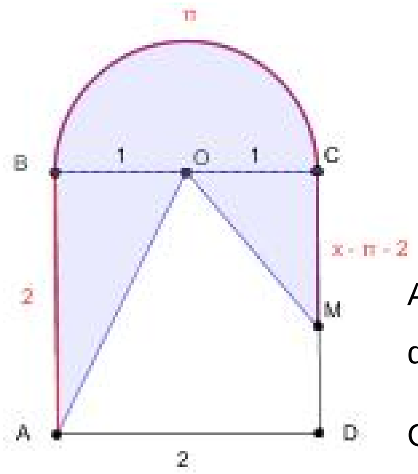
L'aire A(x) est la somme de l'aire du triangle OAB qui vaut 1 (en unité d'aire) et du secteur circulaire délimité par les rayons [OB] et [OM].

L'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle correspondant à ce secteur donc l'aire du secteur circulaire délimité par les rayons [OB] et [OM] vaut :

$$\frac{\pi R^2 \times (x-2)}{2\pi R} = \frac{R \times (x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} \text{ (en unité d'aire)}$$

Donc : $A(x) = 1 + \frac{(x-2)}{2} = \frac{2+x-2}{2} = \frac{x}{2}$ (en unité d'aire)

c)



A (x) est la somme de l'aire du triangle OAB qui vaut 1, de l'aire du demi-disque de diamètre [BC] qui vaut $\frac{\pi}{2}$ et de l'aire du triangle OCM qui vaut $\frac{CM \times OC}{2}$ soit $\frac{(x-\pi-2)\times 1}{2}$.

Donc : $A(x) = 1+\frac{\pi}{2}+\frac{x-\pi-2}{2} = \frac{2+\pi+x-\pi-2}{2} = \frac{x}{2}$ (en unité d'aire)

3)

a) On veut que l'aire A(x) soit égale au quart de A donc qu'elle soit égale à $1+\frac{\pi}{8}$.

La valeur que prend A(x) lorsque M est en D est égale à 2 + $\frac{\pi}{2}$.

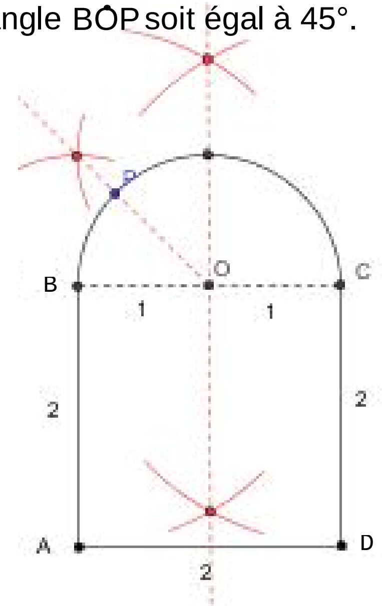
Or $1+\frac{\pi}{8} < 2 + \frac{\pi}{2}$ donc on peut chercher un point M placé avant D et appliquer la formule A(x) = $\frac{x}{2}$.

On résout donc l'équation $\frac{x}{2} = 1+\frac{\pi}{8}$ qui a pour solution $x = 2+\frac{\pi}{4}$

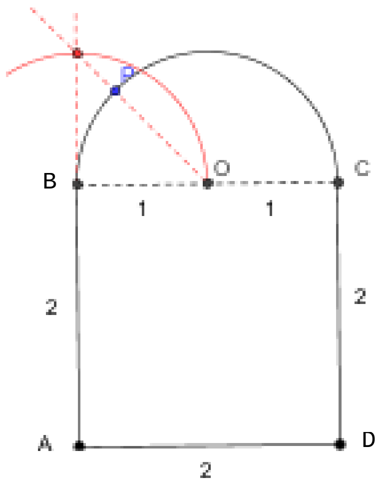
Remarque : on peut aussi trouver x en disant que, comme l'aire du triangle AOB vaut un quart de l'aire du carré ABCD, A(x) vaut un quart de A quand M est situé en un point P du demi-cercle de diamètre [BC]tel que le secteur circulaire BOP ait pour aire le quart de l'aire du demi-disque.

b) 2 est égale à la distance de A à B et $\frac{\pi}{4}$ au quart de la longueur du demi-cercle de diamètre [BC]. Il faut donc construire un point P tel que l'angle $B\hat{O}P$ soit égal à 45°.

Exemple de construction possible :



Autre exemple :



Exercice 1 Questions complémentaires

1°)
La largeur d'une étiquette est égale à 3 cm et la longueur d'une étiquette est égale à 4cm.
Les réponses justes sont donc celles d'Antoine et Mickaël.

Procédure d'Antoine :
Antoine a calculé la largeur d'une étiquette en divisant par 5 la longueur, égale à 15 cm, de la plaque de carton car la longueur de la plaque de carton correspond à cinq largeurs d'étiquette.
Il a trouvé 3 cm.
Ensuite il a trouvé la longueur d'une étiquette en enlevant 6cm (correspondant à 2 largeurs d'étiquette) à la largeur, égale à 10cm, de la plaque de carton car la largeur de la plaque de carton correspond à deux largeurs d'étiquettes et une longueur d'étiquette.

Procédure de Mickaël :
Mickaël a calculé la largeur d'une étiquette en divisant par 5 la longueur, égale à 15 cm de la plaque de carton car la longueur de la plaque de carton correspond à cinq largeurs d'étiquettes.
Il a trouvé 3 cm.
Ensuite il a calculé la longueur de la partie du bord droit de la feuille de carton qui correspond à trois longueurs d'étiquette en retranchant 3 cm à 15 cm (car il a considéré que dans le coin inférieur droit de la feuille de carton il est possible de placer une étiquette).
Il a divisé ensuite le résultat trouvé, 12 cm, par 3 pour trouver la longueur d'une étiquette.

2°)

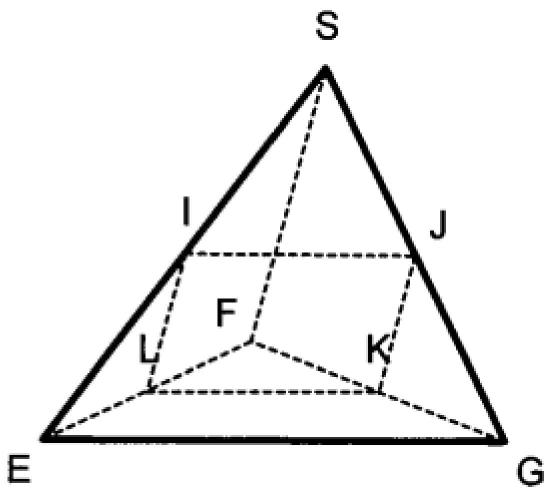
Arnaud a vraisemblablement mesuré la longueur des étiquettes dessinées (il a confondu dimensions réelles et dimensions de la représentation). Il a trouvé 2,4 cm et a ensuite multiplié 2,4 par 11 (car il y a 11 étiquettes). Il a commis une erreur en effectuant la multiplication posée (absence de décalage) et trouvé comme résultat 4,8. Il a ensuite conclu que les étiquettes avaient une largeur et une longueur égales à 2,4 cm (ce qui n'est pas compatible avec le fait que les étiquettes dessinées ne sont pas des carrés) sans qu'on puisse vraiment comprendre le raisonnement utilisé (se sert-il du 4,8 trouvé précédemment ?).

Laura a calculé correctement la largeur égale à 3cm d'une étiquette (en cherchant ? tel que ? × 5 = 15). Elle a commis ensuite une erreur pour trouver la longueur d'une étiquette car elle a considéré que la largeur de la feuille de cartons correspondait à deux longueurs d'étiquettes et une largeur d'étiquette (elle a enlevé 3 cm, largeur d'une étiquette, à 10cm, largeur de la feuille de carton, et a divisé le résultat trouvé, 7cm, par deux) alors que dans la réalité la largeur de la feuille de carton correspond à une longueur d'étiquette et deux largeurs d'étiquettes (elle aurait du enlever 6cm, qui correspond à deux largeurs d'étiquette, à 10cm pour trouver la longueur d'une étiquette). On peut noter que les calculs sont justes (mais ils correspondent à une autre disposition des étiquettes et sont mal présentés : l'écriture 3,5 × 2 = 7 + 3 = 10 est incorrecte ; il convient d'écrire : 3,5 × 2 = 7 et 7 + 3 = 10).

Doriane a effectué sans se tromper les calculs qui convenaient (on peut cependant remarquer que l'écriture 3 × 2 = 6 - 10 = 4 est incorrecte ; il convient d'écrire 3 × 2 = 6 et 10 – 6 = 4) mais, quand il s'agit de conclure, elle inverse longueur et largeur (est-ce une simple étourderie ?).

Marine a calculé correctement la largeur d'une étiquette en divisant 15 par 3 (remarque : elle traduit la division euclidienne effectuée par l'écriture 15 × 5 = 3 R 0 ; elle voulait certainement écrire 15 : 5 = 3 R 0, écriture qu'elle a du voir en classe et qui, d'ailleurs, pose elle-même problème). Ensuite, pour trouver la longueur d'une étiquette elle a fait comme si la largeur de la plaque de carton correspondait à 3 longueurs d'étiquette (alors qu'en fait elle correspond à deux largeurs d'étiquette et une longueur d'étiquette) et a donc effectué la division euclidienne de 10 par 3 (division traduite par l'écriture 10 : 3 = 3 R1). Elle a pris comme résultat le quotient trouvé en effectuant la division.
Il est à noter, par ailleurs, que Marine confond elle aussi les termes largeur et longueur.

3°) En proposant un problème de même nature que le précédent mais avec des dimensions de plaque, un nombre d'étiquettes et un schéma différents à Marine et Laura, le maître fait l'hypothèse que le dessin a été mal lu par ces deux élèves qui ont confondu longueur et largeur. Sur la nouvelle plaque, les étiquettes sont plus nettement rectangulaires : largeur et longueur sont très différentes.



1°) a) Dans le triangle EFS, I est le milieu du côté [ES] et L est le milieu du côté [EF]. Donc, d'après le théorème réciproque du théorème de Thalès (on applique un cas particulier du théorème réciroque du théorème de Thalès appelé parfois théorème des milieux), la droite (IL) est parallèle à la droite (SF).
De même, dans le triangle GFS, J est le milieu du côté [GS] et K est le milieu du côté [GF]. Donc, d'après le théorème déjà cité, (JK) est parallèle à la droite (SF).

On peut en conclure que les droites (IL) et (KJ) qui sont parallèles à une même droite (SF) sont parallèles.

b) En utilisant les triangles SEG et FEG on peut démontrer de façon tout à fait analogue à ce qui a été fait au a) que les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.

Le quadrilatère IJKL qui a des côtés opposés parallèles deux à deux est donc un parallélogramme.

2°) IL = $\frac{SF}{2}$ (car le triangle EIL est l'image du triangle ESF dans l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{1}{2}$). De même, IJ = $\frac{EG}{2}$ car (car le triangle SIJ est l'image du triangle SEG dans l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{1}{2}$).

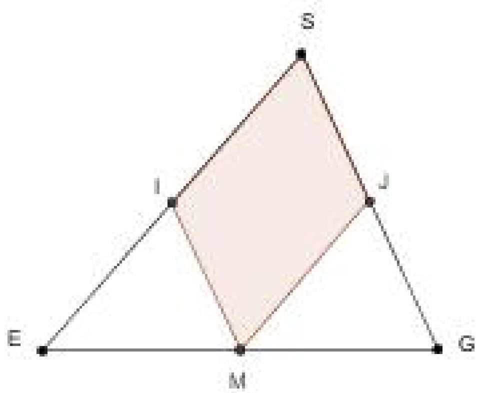
Si on suppose que SF = EG, on peut donc en déduire que IL = IJ et donc que le parallélogramme IJKL qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

3°)

Si la droite (SF) est orthogonale au plan (EFG), la droite (IL), qui lui est parallèle, est également orthogonale au plan (EFGH). Comme (IL) coupe en L la droite (LK) qui est une droite du plan (EFGH), on peut donc en déduire que les droites (IL) et (LK) sont perpendiculaires.

Le parallélogramme IJKL, dont l'un des angles est droit, est donc un rectangle.

4°)



Le quadrilatère SIMJ est toujours un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux [on applique deux fois le cas particulier du théorème réciproque du théorème de Thalès, appelé théorème des milieux, pour démontrer que : (MJ) // (ES) et (IM) // (SG)].

Pour que le quadrilatère SIMJ, qui est un parallélogramme, soit un losange il suffit donc que MJ = IM.

Or on sait que MJ = $\frac{ES}{2}$ et que IM = $\frac{SG}{2}$.

Pour que le quadrilatère SIMJ soit un losange il suffit donc que ES = SG c'est-à-dire que SEG soit un triangle isocèle de sommet S.

5°) Pour que le quadrilatère SIMJ, qui est un parallélogramme, soit un rectangle il suffit que le triangle SEG soit un triangle rectangle en S (car tout parallélogramme dont l'un des angles est droit est un rectangle).

Exercice 3

1°)

$a_0 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1}$ $a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Ces quatre nombres sont des nombres décimaux car ils sont représentés par des fractions irréductibles dont les dénominateurs sont égaux à des puissances de 2.

Autre explication possible : ces quatre nombres sont des nombres décimaux car ils admettent une représentation décimale comportant un nombre fini de chiffres.

2°) $a_{2009} = \frac{1}{2^{2009}}$

a_{2009} est un nombre décimal car il est représenté par une fraction irréductible dont le dénominateur est égal à une puissance de 2.

Écriture de a_{2009} sous forme de fraction décimale : $a_{2009} = \frac{1}{2^{2009}} = \frac{5^{2009}}{2^{2009} \times 5^{2009}} = \frac{5^{2009}}{10^{2009}}$

3°)

L'écriture décimale de a_1, qui vaut 0,5 comporte 2 chiffres.
Quand on multiplie a_1 par 0,5 on obtient un nombre a_2 dont l'écriture décimale comporte 3 chiffres.
Quand on multiplie a_2 par 0,5 on obtient un nombre a_3 dont l'écriture décimale comporte 4 chiffres.
Quand on multiplie a_3 par 0,5 on obtient un nombre a_4 dont l'écriture décimale comporte 5 chiffres.
Etc. (Chaque multiplication par 0,5 ajoute 1 chiffre)

L'écriture décimale de a_{2009} comporte donc 2010 chiffres.

Le fait de multiplier par 0,5 pour passer d'un terme de la suite à l'autre fait que, à partir de a_3, les trois derniers chiffres de l'écriture décimale de a_n sont alternativement 125 et 625 (125 si n est impair et 625 si n est pair).

L'écriture décimale de a_{2009} se termine donc par 125.

4°)

a_4 est égal à 0,0625 et a_{2009} est inférieur à a_4 (la suite des nombres a_n est décroissante) donc le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de a_{2009} est égal à 0.

Exercice 3 Questions complémentaires

1°) a)
Ecriture à virgule : 4,35

Ecriture fractionnaire avec un dénominateur égal à une puissance de dix (fraction décimale) : $\frac{435}{100}$

Ecriture en lettres : quatre unités trois dixièmes cinq centièmes
(ou quatre unités trente-cinq centièmes)

Décompositions : $4 + \frac{35}{100}$ $\quad 4 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$

b)

Un élève de cycle 3 peut comparer deux entiers en utilisant la procédure suivante :

- Si les deux entiers n'ont pas le même nombre de chiffres, celui qui a le plus grand nombre de chiffres est le plus grand.
Exemple : 3456 > 723 car il faut quatre chiffres pour écrire 3456 et seulement trois pour écrire 723.
- Si les deux entiers ont le même nombre de chiffres, on compare successivement « les chiffres du même ordre » en partant de la gauche et dès qu'on rencontre une différence « le chiffre le plus grand » correspond au nombre le plus grand.
Exemple : 3472 > 3459 car 7 > 5

Cette procédure peut faire obstacle à la comparaison des décimaux car il se peut que l'élève continuer de l'appliquer en dehors de son champ de validité qui est l'ensemble des nombres entiers.

Exemples :

3, 245 > 3,78 car il faut quatre chiffres pour écrire 3,245 et seulement trois pour écrire 3,78.

32,43 > 321,7 car 4>1.

2°)

a) Les situations qui conduisent à ranger des données sont la situation 1, les questions 1 et 3 de la situation 2 et la situation 4.

b) Les situations qui posent un problème de comparaison à un référent fixe sont
- la question 2 de la situation 2 (référent : 10s)
- la situation 3 (référent : 8,5 T et 2,85 m)
- la situation 4 (référent : $\frac{1}{7}$ kg)

3°)

a) Si le troisième fondeur était allé jusqu'au milligramme, on aurait eu six chiffres après la virgule : 0,142 857 kg

b) On peut être amené à rencontrer des décimaux ayant une partie décimale plus longue, par exemple, dans les cas suivants :

- Utilisation de la calculatrice
- Division décimale de deux entiers
- Conversions (en particulier pour les mesures d'aires) :

  12 748 m² = ………km²

  152 345 dag = …………T