RAPPELS DE GÉOMETRIE (sans didactique)

Des animations avec applets java illustrant différentes parties de ce document sont disponibles à cette adresse :
http://dpernoux.free.fr/ExPE1/anim.htm

Les constructions géométriques élémentaires avec une règle non graduée et un compas ne sont pas rappelées dans ce document mais on les trouve ici :
http://perso.orange.fr/pernoux/conselem.pdf

Et des animations en ligne reproduisant toutes ces constructions sont disponibles à cette adresse : http://pernoux.perso.orange.fr/main.htm#cons

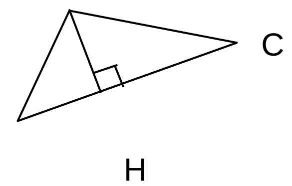
Sommaire de ce document :

Remarques préalables :
1°) Il a trois types d’objets géométriques : les lignes, les surfaces et les solides
(certains termes comme « triangle », « carré », « polygone », etc. sont ambigus et désignent parfois des lignes et parfois des surfaces)

2°) Il faut faire très attention aux notations :
- ∉ [AB] désigne le segment (fermé) d'extrémités A et B (c'est un ensemble de points)
- ∉ (AB) désigne la droite passant par les points A et B (c'est un ensemble de points)
- ∉ [Ax) désigne une demi-droite (fermée) d'origine le point A (c'est un ensemble de points)
- ∉ AB désigne une longueur (**ce n'est pas un ensemble de points**). On peut également noter cette longueur d(A,B).

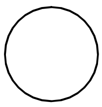
<u>I Formules pour calculer des aires :</u>

Aire du triangle :



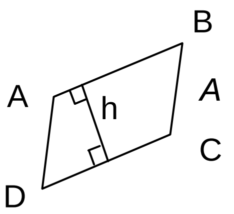
$A = \frac{BC \Delta AH}{2}$

Aire du disque :



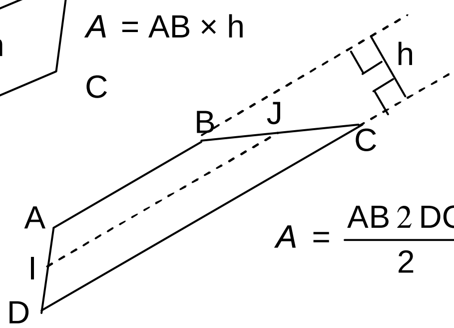
$A = \phi R^2$ (ne pas confondre avec L=2ϕR, longueur d'un cercle)

Aire du parallélogramme :



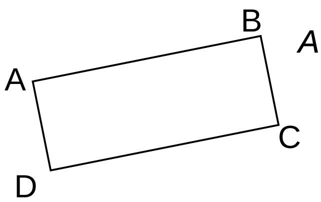
$A = AB \times h$

Aire du trapèze :



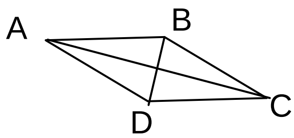
$A = \frac{AB \, 2 \, DC}{2} \Delta h \,|\; IJ \Delta h$ (avec I milieu de [AD] et J milieu de [BC]

Aire du rectangle :



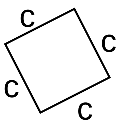
$A = AB \times BC$

Aire du losange :



$A = \frac{AC \Delta DB}{2}$

Aire du carré :



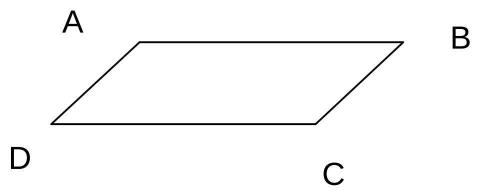
$A = c^2$

Aire de la sphère : $A = 4\phi R^2$ (ne pas confondre avec $V = \frac{4}{3}\phi R^3$ pour le volume)

II Quelques propriétés utiles pour bâtir une démonstration géométrique *(très important)*

1°) Principe

Considérons les affirmations suivantes :



P1 : (AB) // (DC) et (AD) // (BC)
P2 : (AB) // (DC) et AB = DC
P3 : AB = DC et AD = BC
P4 : [AC] et [BD] ont même milieu

On démontre que chacune de ces affirmations, prise isolément, est équivalente à l'affirmation P suivante : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Bien comprendre ce que ceci signifie : dire que l'affirmation P3 est équivalente à l'affirmation « le quadrilatère ABCD est un parallélogramme » c'est, non seulement, dire, que, pour tout parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur deux à deux mais c'est aussi dire que tout quadrilatère qui a des côtés opposés de même longueur deux à deux est un parallélogramme.

Bâtir une démonstration va consister à enchaîner des propriétés :
si, à un certain moment, on sait, par exemple, que P3 est vérifiée (autrement dit si on sait que AB = DC et AD = BC), on pourra en déduire que ABCD est un parallélogramme. A l'étape suivante, on pourra en déduire que P1, par exemple, est vérifiée, autrement dit que (AB) // (DC) et (AD) // (BC).

La démonstration aura donc consisté à enchaîner deux théorèmes :

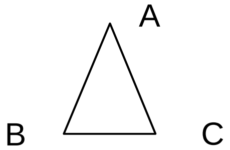
Premier théorème (P3 $\Rightarrow$ P) : si un quadrilatère a des côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Deuxième théorème (P $\Rightarrow$ P1) : si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Il est donc important de connaître pour diverses figures élémentaires une liste de propositions équivalentes

2°) Listes de propositions équivalentes

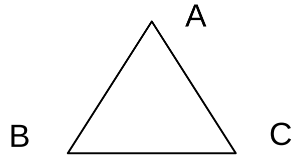
a) Liste de propositions équivalentes à la proposition TI : « Le triangle ABC est isocèle de sommet A »

TI1 : AB = AC
TI2 : ABC = ACB

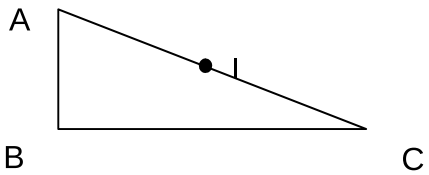


b) Liste de propositions équivalentes à la proposition TE : « Le triangle ABC est équilatéral »

TE1 : AB = AC = BC
TE2 : ABC = ACB = BAC
TE3 : ACB = ABC =60°



c) Liste de propositions équivalentes à la proposition TR : « Le triangle ABC est un triangle rectangle en B »

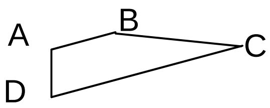


TR1 : ABC = 90°
TR2 : $AC^2 = AB^2 + BC^2$
TR3 : I est le milieu de [AC] et IA = IB = IC

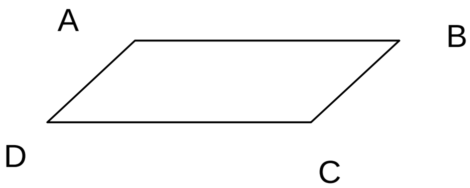
Remarques :
Le théorème « TR ♥ TR2 » est le théorème de Pythagore.
Le théorème « TR2 ♥ TR » est le théorème réciproque du théorème de Pythagore
Le théorème « TR ♥ TR3 » exprime le fait que si un triangle ABC est rectangle en B alors le cercle de diamètre [AC] passe par B.
Le théorème « TR3 ♥ TR » exprime le fait que si [AC] est un diamètre d'un cercle et B un point de ce cercle alors le triangle ABC est rectangle en B

d) Proposition équivalente à la proposition T : « Le quadrilatère ABCD est un trapèze »

T1 : (AB) ∥ (DC)



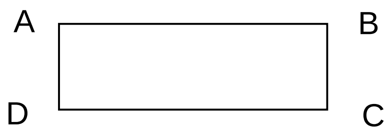
e) Liste de propositions équivalentes à la proposition P : « Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme »



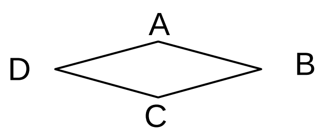
P1 : (AB) ∥ (DC) et (AD) ∥ (BC)
P2 : (AB) ∥ (DC) et AB = DC
P3 : AB = DC et AD = BC
P4 : [AC] et [BD] ont même milieu

f) Liste de propositions équivalentes à la proposition R : « Le quadrilatère ABCD est un rectangle »

R1 : Les angles de ABCD sont des angles droits
R1 : ABCD est un parallélogramme et ADC = 90°
R2 : ABCD est un parallélogramme et AC = DB



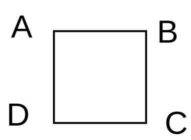
g) Liste de propositions équivalentes à la proposition L : « Le quadrilatère ABCD est un losange »



L1 : AB = BC = CD = DA
L2 : ABCD est un parallélogramme et (AC) γ (DB)

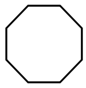
h) Liste de propositions équivalentes à la proposition C : «Le quadrilatère ABCD est un carré»

C1 : ABCD est un rectangle et ABCD est un losange
C2 : AB = BC = CD = DA et BAD = 90°



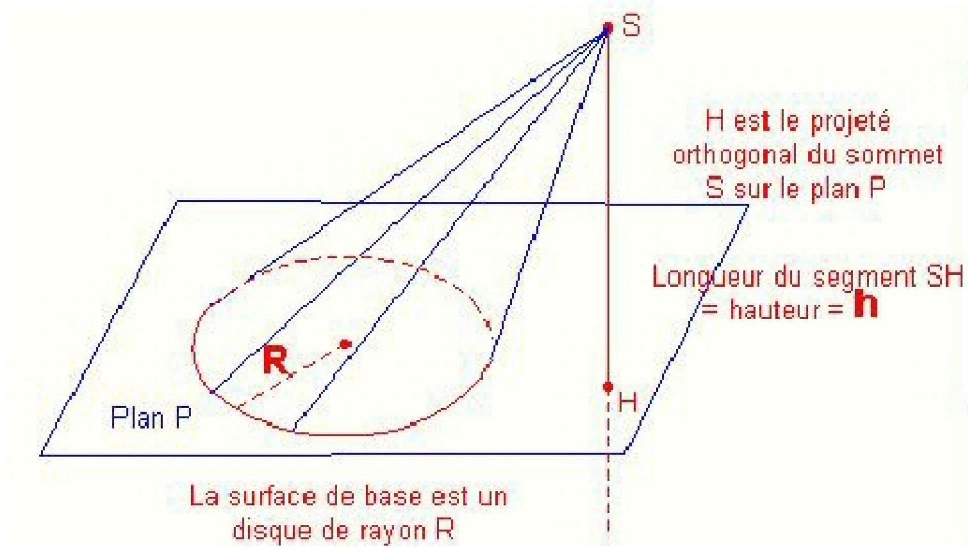
i) Liste de propositions équivalentes à la proposition PR : « Le polygône P est un polygône régulier »

PR1 : Tous les côtés de P ont même longueur et tous ses angles sont égaux
PR2 : P est inscriptible dans un cercle et tous les angles au centre déterminés par les segments joignant le centre du cercle à deux sommets succesifs sont égaux.



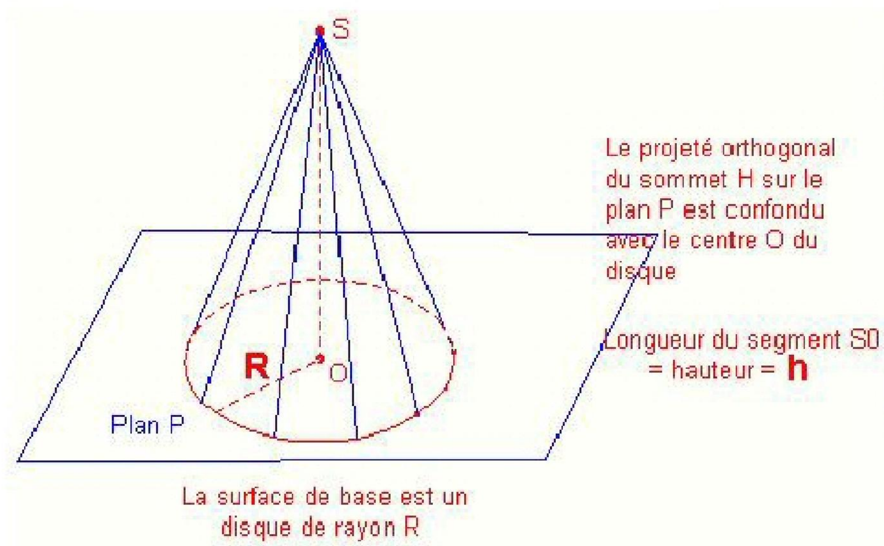
III Formules permettant de calculer des volumes de solides :

Cône circulaire



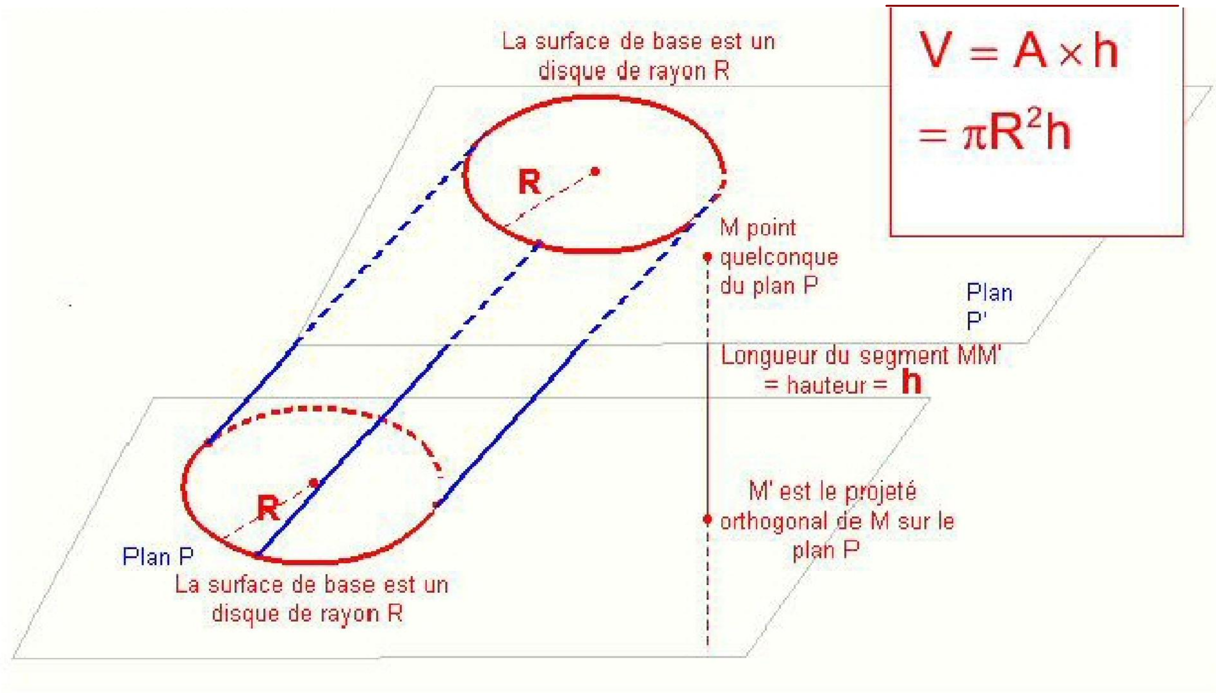
$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$$

Cône circulaire droit (ou cône de révolution)

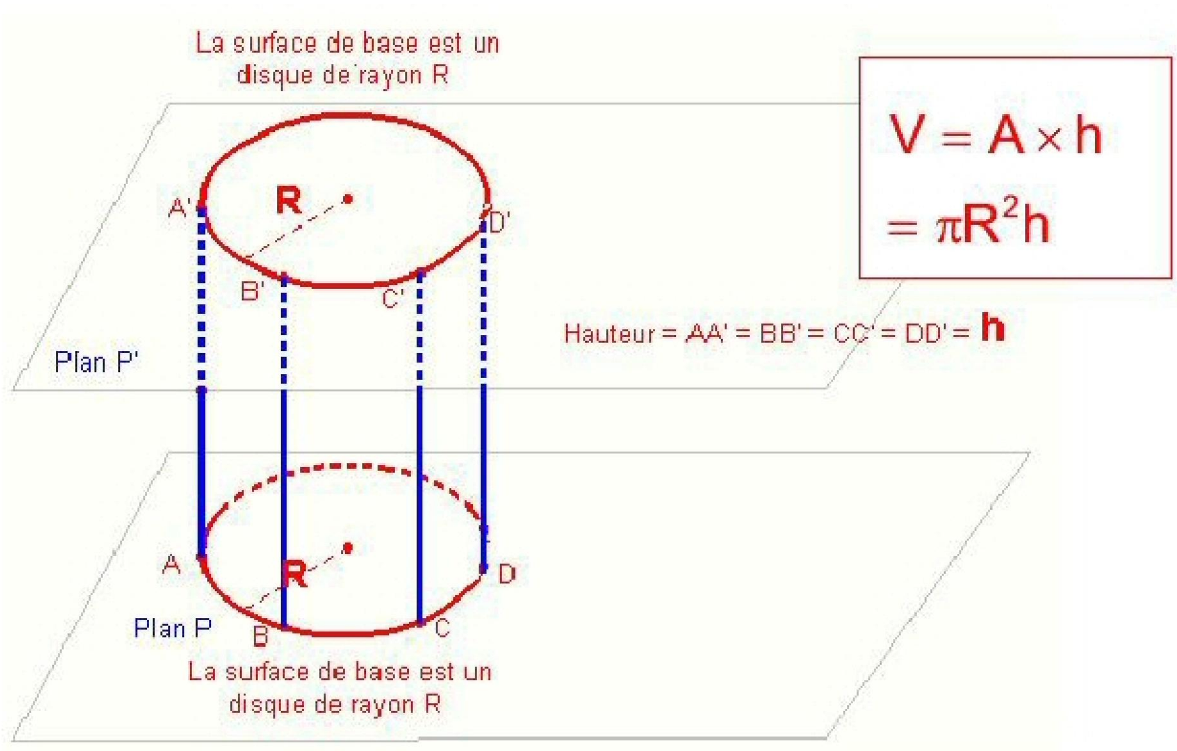


$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$$

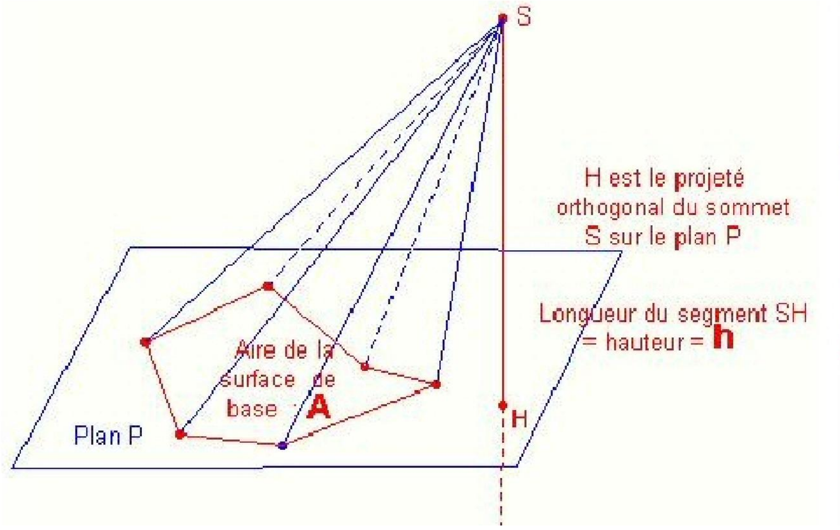
Cylindre circulaire



Cylindre circulaire droit (ou cylindre de révolution)



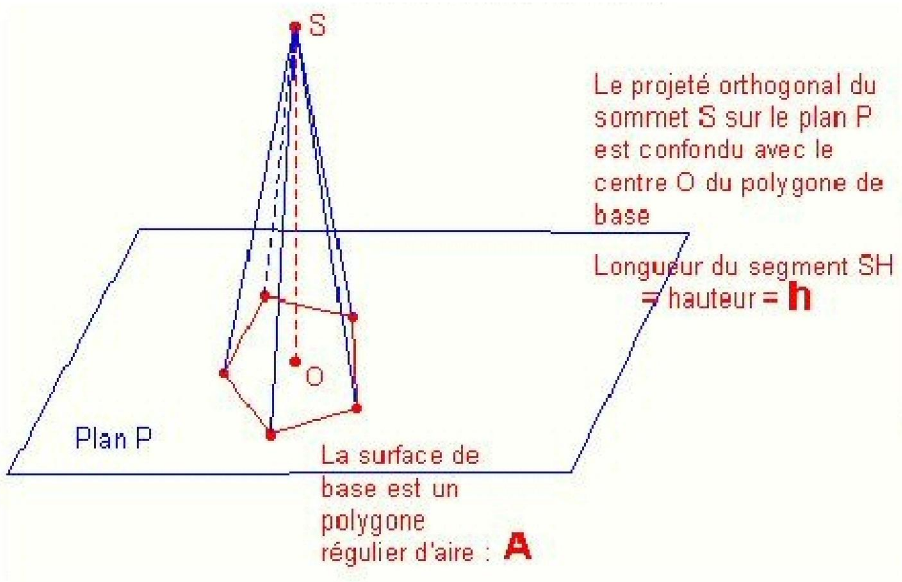
Pyramide



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

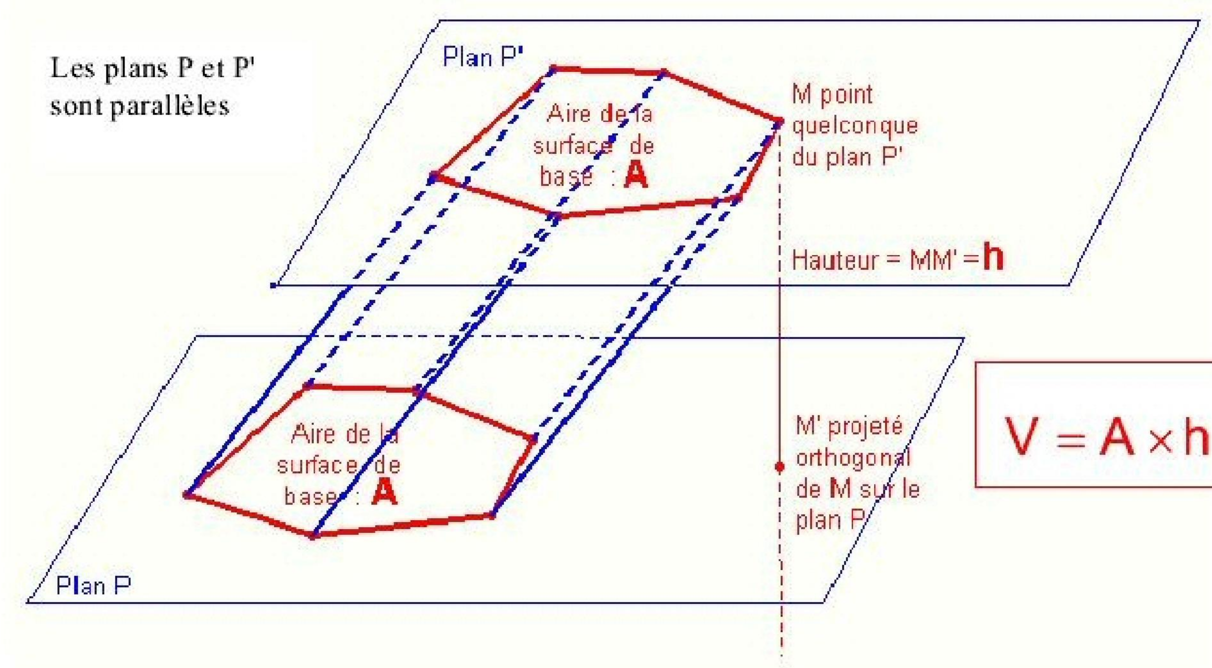
Pyramide régulière *(attention : ce n'est un polyèdre régulier que dans le cas où c'est in tétraèdre régulier)*

Remarque : le tétraèdre est un cas particulier de pyramide



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

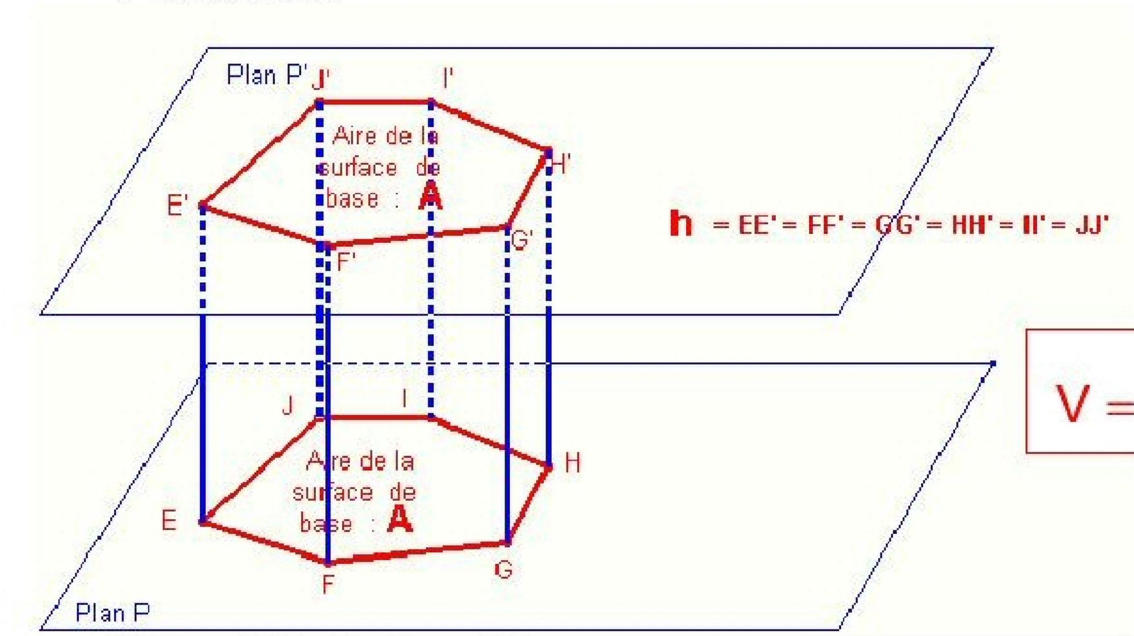
Prisme



$$\boxed{V = A \times h}$$

Cas particuliers :

Prisme droit :



$$\boxed{V = A \times h}$$

Cas particulier de prisme droit :

Le parallélépipède rectangle (ou pavé) $\boxed{V = L \times l \times h}$

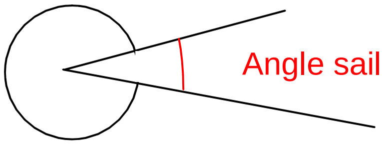
Cas particulier de parallépipède rectangle :

Le cube $\boxed{V = a^3}$

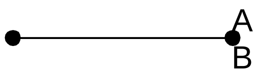
Volume d’une boule : V = $\frac{4}{3} p R^3$

IV Définitions et propriétés concernant les angles

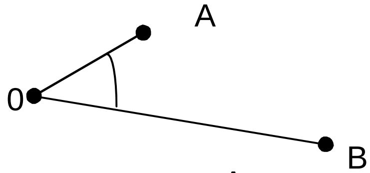
Angle rentrant



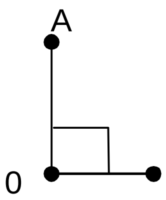
Angle nul :



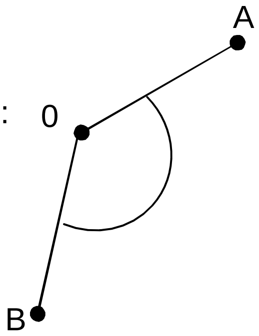
Angle aigu :



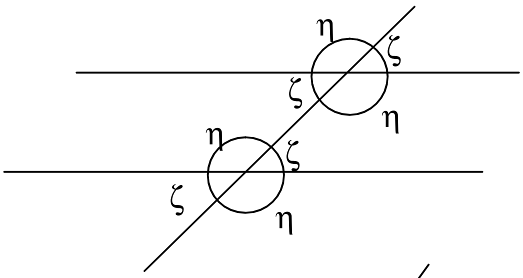
Angle droit :



Angle obtus :

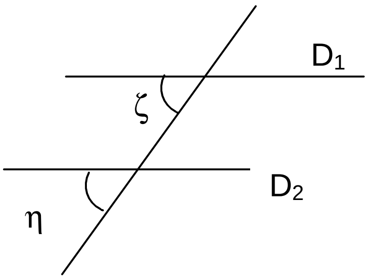


Propriétés des droites parallèles :



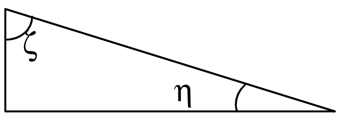
De plus ζ + η = 180 °
(remarque ; c’est un cas particulier d’angles supplémentaires)

Remarque :



Si ζ est égal à η, alors D_1 et D_2 sont parallèles.

Angles d’un triangle rectangle :

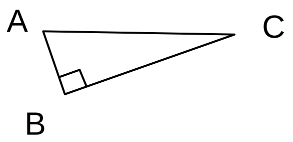


ζ + η = 90 °

(remarque : c’est un cas particulier d’angles complémentaires)

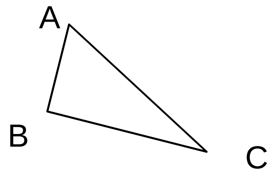
V Quelques théorèmes

1°) a) Théorème de Pythagore :



Si le triangle ABC est rectangle en B, alors AC² = AB² + BC²

b) Théorème réciproque du théorème de Pythagore : Si AC² = AB² + BC², alors le triangle ABC est rectangle en B.



2°)

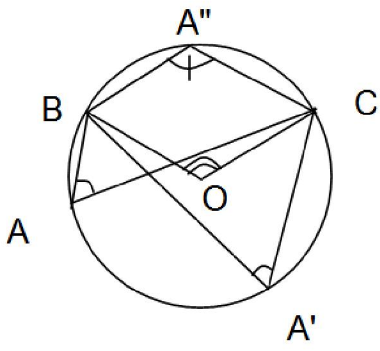
a) Autre théorème concernant les triangles rectangles :

Si le triangle ABC est rectangle en B alors le cercle de diamètre [AC] passe par B.

b) Théorème réciproque de cet autre théorème :

Si [AC] est un diamètre d'un cercle et B un point de ce cercle, alors le triangle ABC est rectangle en B.

3°) Propriété des angles "inscrits dans un cercle"

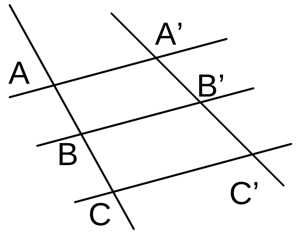


Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ sont égaux.

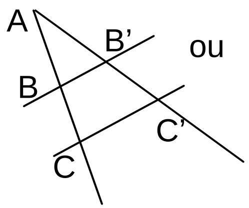
L'angle au centre $\widehat{BOC}$ est égal à deux fois $\widehat{BAC}$.

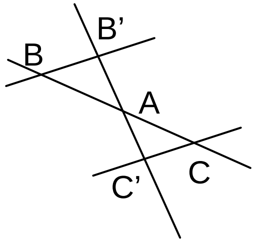
Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA''C}$ sont supplémentaires.

4 °) Théorème de Thalès et théorème réciproque du théorème de Thalès :

<table>
<tr><td></td><td>Cas général</td><td>Cas particulier</td><td>Cas particulier</td></tr>
<tr>
<td>Théorème de Thalès</td>
<td>

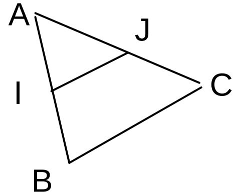
Hypothèses :
(AA') // (BB') et (BB')// (CC')

Conclusions :
$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ ou $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ ou etc.</td>
<td>

ou


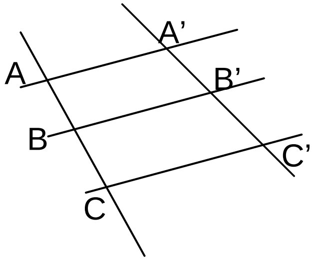
Hypothèse :
(BB') // (CC')

Conclusions :
$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ ou $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$ ou etc.

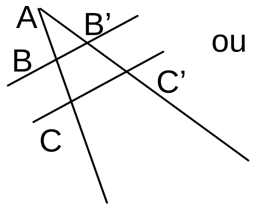
Remarque : le rapport $\frac{AB}{AC}$ (**et pas un autre**) est encore égal à $\frac{BB'}{CC'}$</td>
<td>

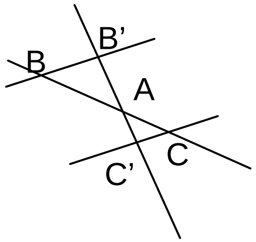
Hypothèses :
(IJ) // (BC)
et I est le milieu de [AB]

Conclusion :
J est le milieu de [AC]

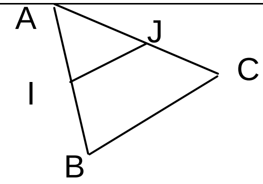
*Ce cas particulier du théorème de Thalès est en général appelé théorème **réciproque** du théorème des milieux*</td>
</tr>
<tr>
<td>Théorème réciproque du théorème de Thalès</td>
<td>

Hypothèses :
(AA') // (BB') et $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Conclusion : (CC') // (AA')</td>
<td>

ou


Hypothèses : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

Conclusion : (BB') // (CC')</td>
<td>

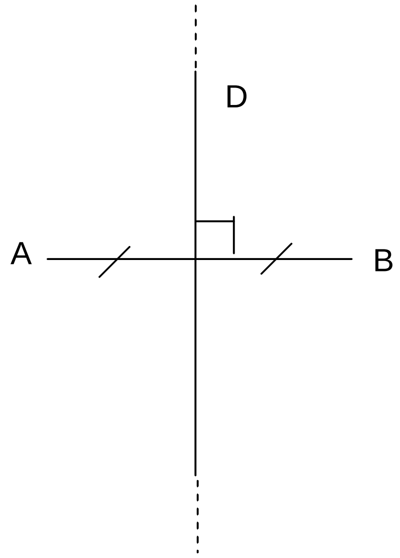
Hypothèses :
I est le milieu de [AB]
et
J est le milieu de [AC]

Conclusion : (IJ) // (BC)
*Ce cas particulier du théorème **réciproque** du théorème de Thalès est en général appelé théorème des milieux*</td>
</tr>
</table>

VI Autres définitions et propriétés :

Médiatrice d'un segment :

La médiatrice D d'un segment [AB] est la droite perpendiculaire à ce segment [AB] en son milieu :

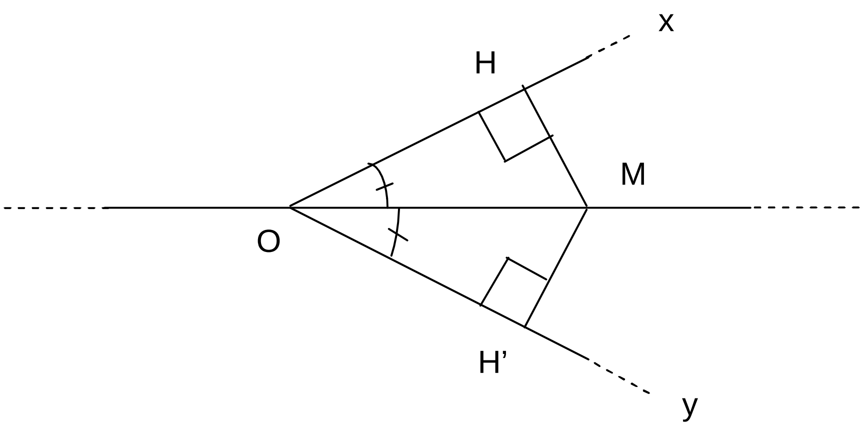


Propriétés :
- Si M appartient à D, alors : MA = MB
- Si Ma = MB, alors M appartient à D

Conséquence : la médiatrice de [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et B

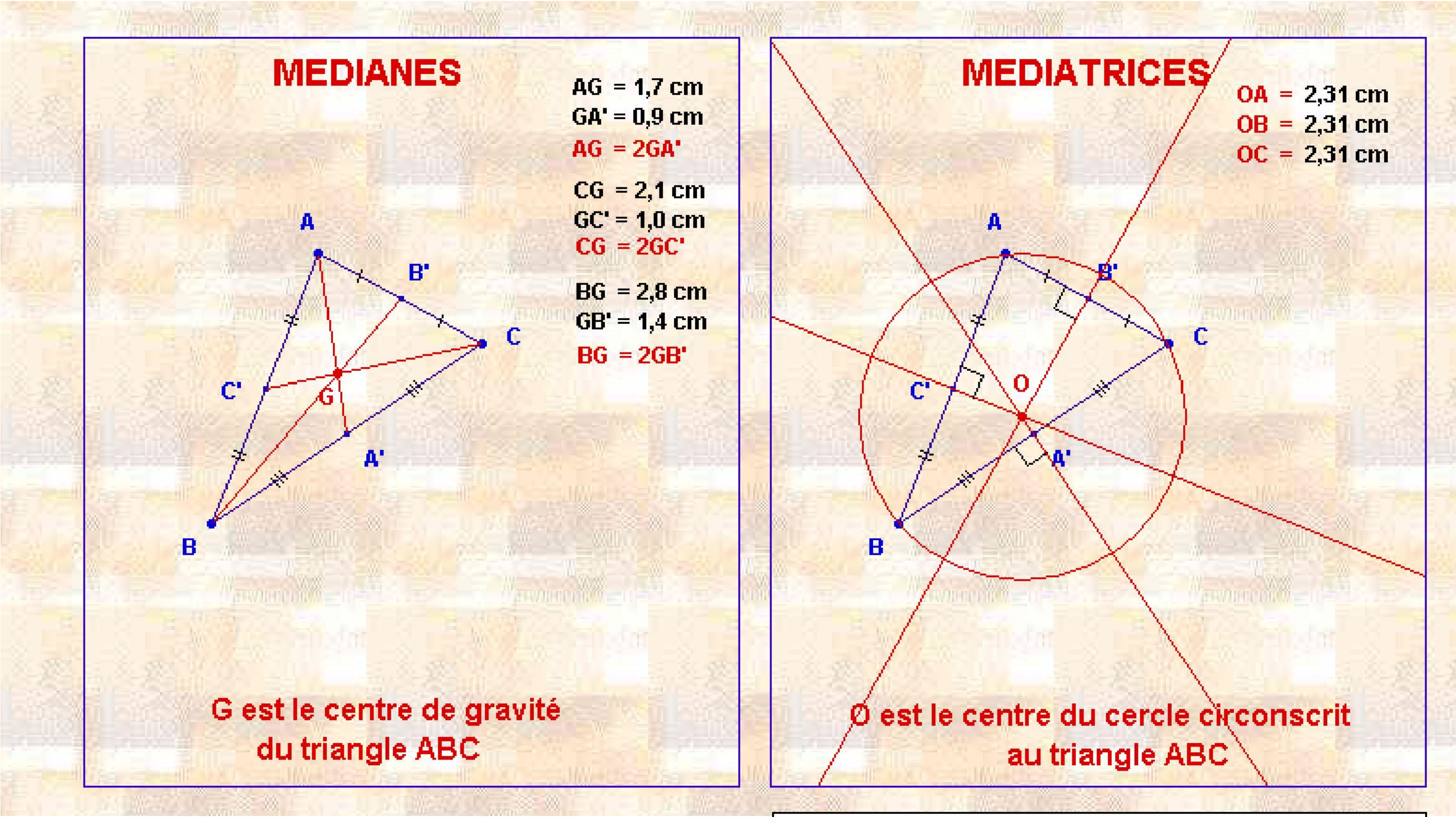
Bissectrice d'un angle :

La bissectrice d'un angle $\widehat{xOy}$ est la droite D qui partage cet angle en deux angles égaux :



Propriété :
Si M appartient à D alors MH = MK (où H et K sont les projetés orthogonaux de M sur (Ox) et (Oy).

VII Propriétés concernant le triangle :



Les **médianes** du triangle (droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité** du triangle.

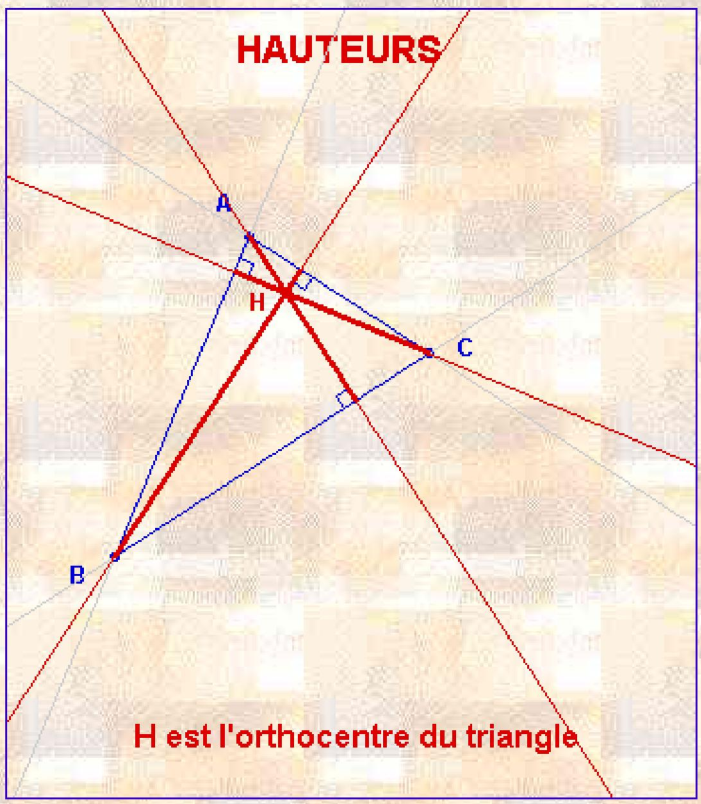
Propriété :

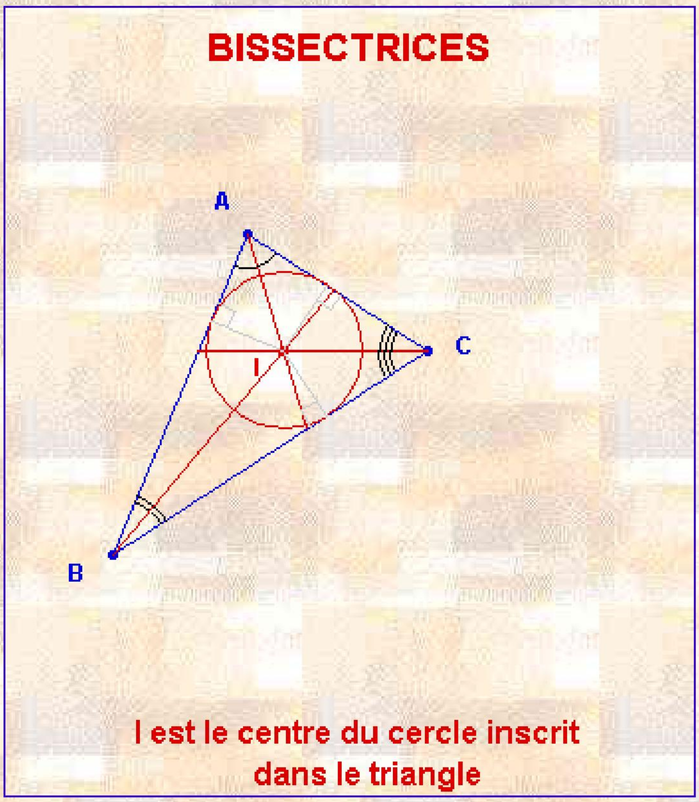
$$AG = \frac{2}{3}AA'$$

$$BG = \frac{2}{3}BB'$$

$$CG = \frac{2}{3}CC'$$

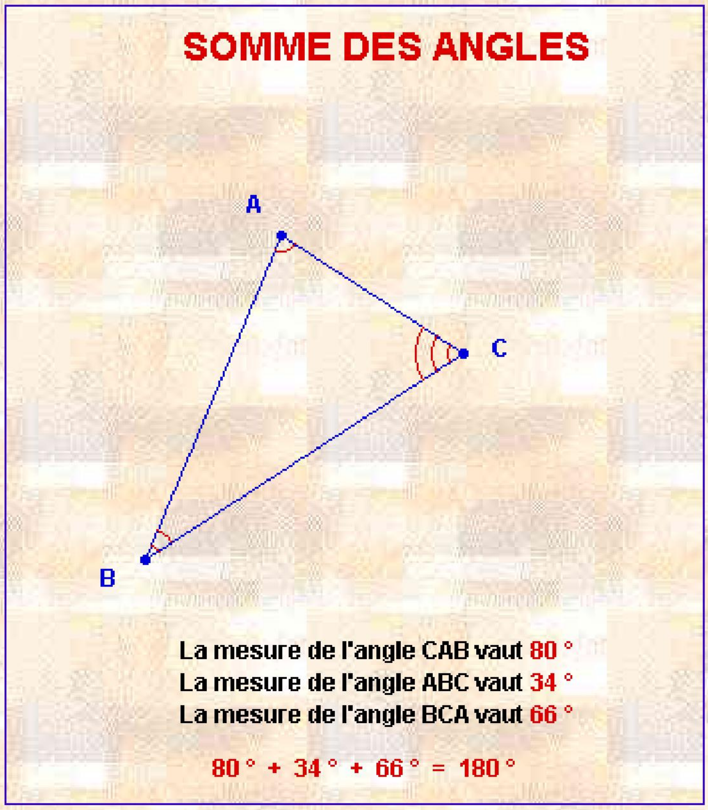
Les **médiatrices** du triangle (droites médiatrices des côtés du triangle) sont concourantes en un point 0 qui est le **centre du cercle passant par A, B et C** (cercle circonscrit au triangle ABC)

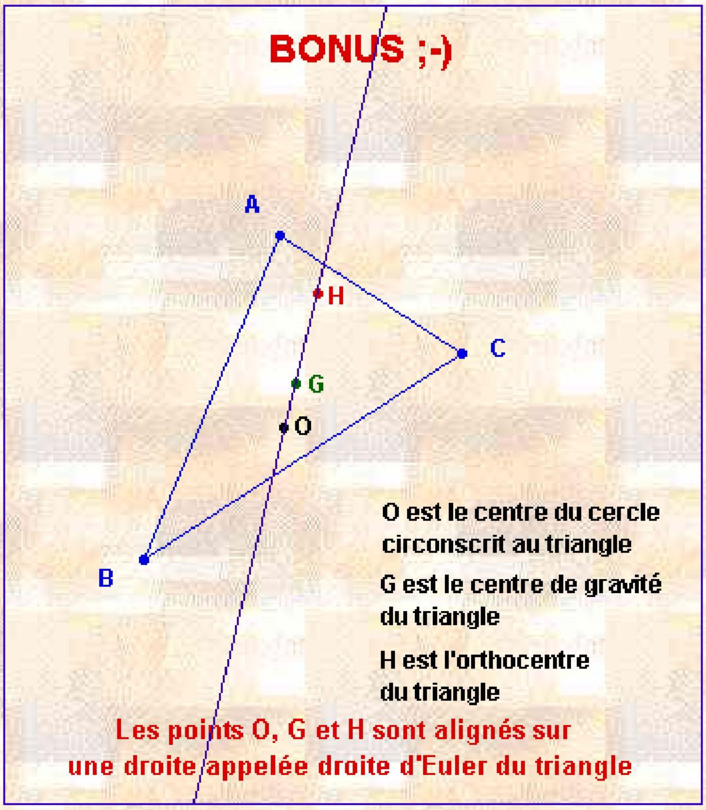




Les **hauteurs** du triangle (droites passant par un sommet et perpendiculaires au côté opposé) sont concourantes en un point H appelé **orthocentre** du triangle.

Les **bissectrices des angles sont** concourantes en un point I qui est le centre du cercle tangent aux trois côtés (cercle inscrit dans le triangle)





$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180°$

Pas indispensable pour le CRPE … ;-)

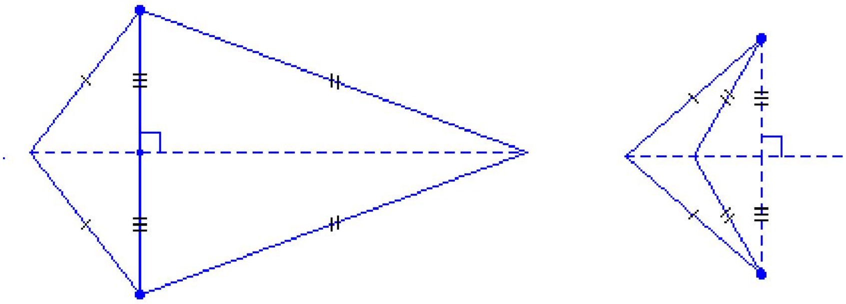
VIII Compléments divers

1°) Cerf-volant

Première définition possible : on appelle cerf-volant un quadrilatère qui admet une de ses diagonales pour axe de symétrie

Deuxième définition possible (équivalente à la première) : on appelle cerf-volant un quadrilatère ayant deux côtés consécutifs de même longueur et dont les 2 autres côtés sont aussi de même longueur.

Cerf-volant convexe Cerf-volant concave



2°) La famille

<table>
<tr><td colspan="5">TRIANGLES</td></tr>
<tr><td>TRIANGLES
NI ISOCÈLES
NI RECTANGLES</td><td>TRIANGLES
RECTANGLES
MAIS PAS
ISOCÈLES</td><td colspan="2">TRIANGLES ISOCÈLES MAIS
PAS RECTANGLES</td><td>TRIANGLES
ISOCÈLES
ET
RECTANGLES</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>TRIANGLES
PAS
ÉQUILATERAUX</td><td>TRIANGLES
ÉQUILATERAUX</td><td></td></tr>
</table>

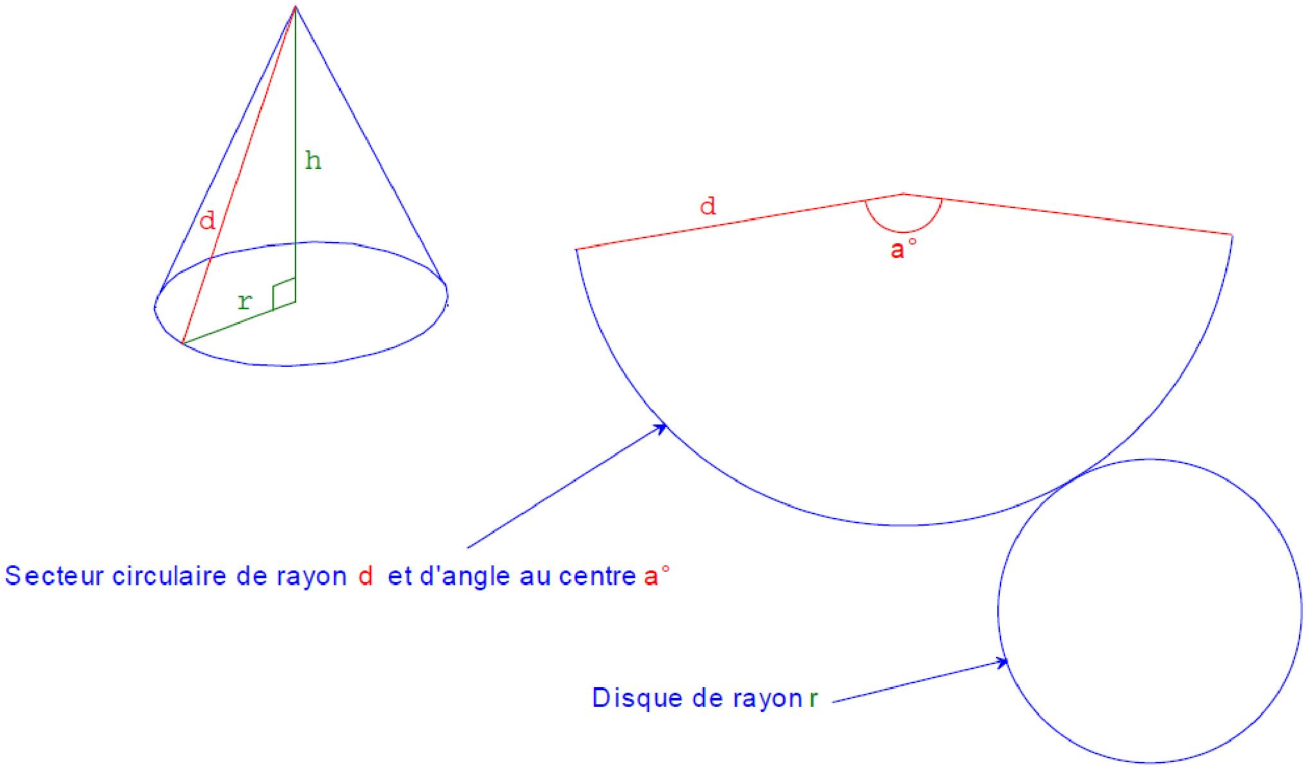
3 °) La famille des quadrilatères

<table>
<tr><td colspan="5">QUADRILATÈRES</td></tr>
<tr><td>QUADRILATÈRES
CROISÉS</td><td>QUADRILATÈRES
NON CROISES
CONCAVES</td><td colspan="3">QUADRILATÈRES
NON CROISÉS
CONVEXES</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>PAS
TRAPÈZES</td><td colspan="2">TRAPEZES</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>PAS
PARALLÉLOGRAMMES</td><td>PARALLÉLOGRAMMES</td></tr>
</table>

La sous-famille des parallélogrammes

<table>
<tr><td colspan="4">PARALLÉLOGRAMMES</td></tr>
<tr><td>LOSANGES
PAS RECTANGLES</td><td>RECTANGLES
PAS LOSANGES</td><td>RECTANGLES ET
LOSANGES
=
CARRÉS</td><td>NI RECTANGLES
NI LOSANGES</td></tr>
</table>

4°) Patron d'un cône circulaire droit (ou cône de révolution) dont on connaît le rayon de base r et la hauteur h



Calcul de d :

D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = h^2 + r^2$ donc $d = \sqrt{h^2 + r^2}$

Calcul de a°

La longueur d'un arc d'un cercle est proportionnelle à l'angle au centre qui correspond à cet arc.

Angle au centre	180°	a°
Longueur de l'arc	πd	$2\pi r$

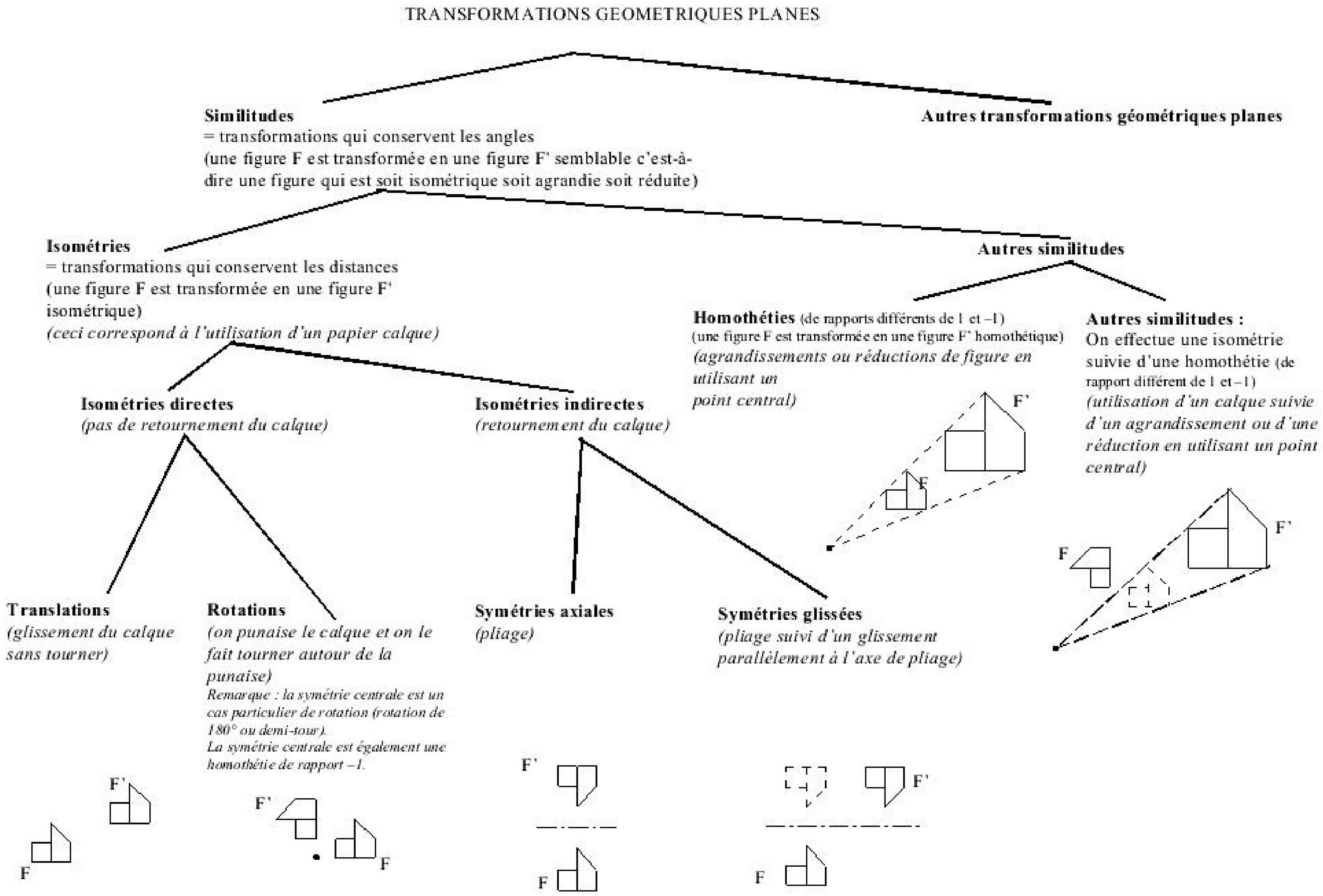
$$a° = \frac{180° \times 2\pi r}{\pi d}$$

Donc : $a° = \frac{r}{d} \times 360° = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} \times 360°$

Voir aussi : http://perso.wanadoo.fr/pernoux/cone.htm (calculs en ligne)

IX Transformations géométriques

1°) Généralités



2°) Compléments concernant l'homothétie

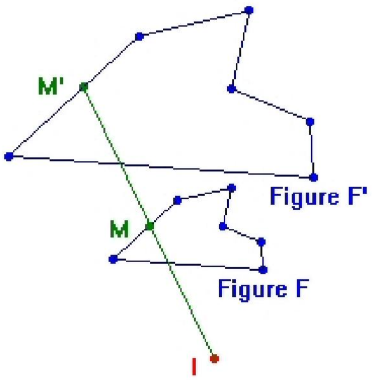
Deux figures sont homothétiques quand l'une est l'image de l'autre dans une homothétie.

a) Définition de la notion d'homothétie :

Dans l'homothétie de centre I et de rapport k

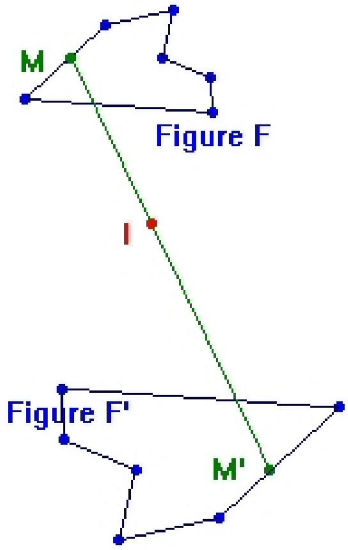
Si k est positif, M est transformé en M' tel que :

- I, M et M' sont alignés
- M' est sur la demi-droite [IM) d'origine I
- IM' = k × IM



Exemple avec k = 2

Si k est négatif, M est transformé en M' tel que :
- I, M et M' sont alignés
- M' n'est pas sur la demi-droite [IM) d'origine I
- IM' = | k | × IM (c'est-à-dire que si k = - 3 alors IM' = 3 × IM)



Exemple avec k = -1,5

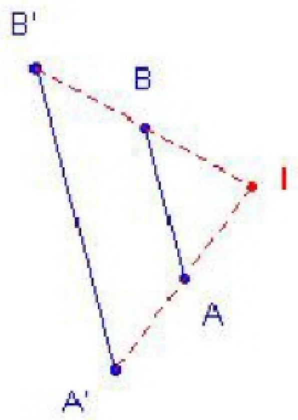
b) Propriétés :

Première propriété :

Soit deux points A et B et soit A' et B' les images respectives de ces points A et B dans une homothétie de centre I et de rapport k.

Propriété : (A'B') // (AB) et A'B' = IkI × AB ou IkI désigne la valeur absolue de k.

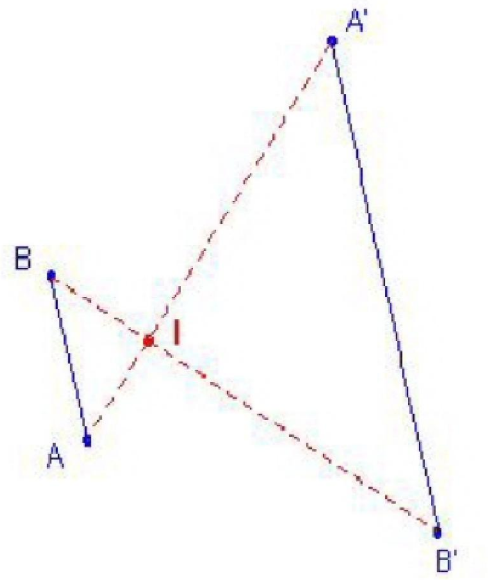
Premier exemple avec k = 2



$A'B' = 2AB$

Deuxième exemple avec k = -3

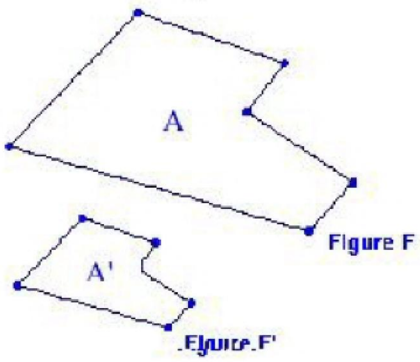
$A'B' = |-3| \times AB = 3AB$



Deuxième propriété :

Si une figure F' est l'image d'une figure F dans une homothétie de centre I et de rapport k et si F a une aire égale à A alors F' a une aire égale à $k^2 \times A$.

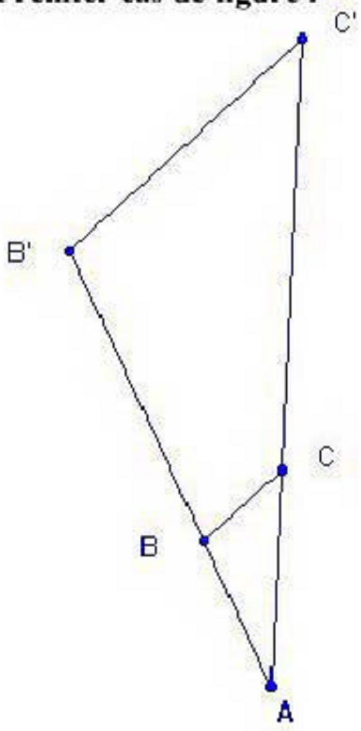
Exemple avec $k = \frac{1}{2}$:



$A' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times A = \frac{1}{4}A$

c) Triangles homothétiques

Premier cas de figure :



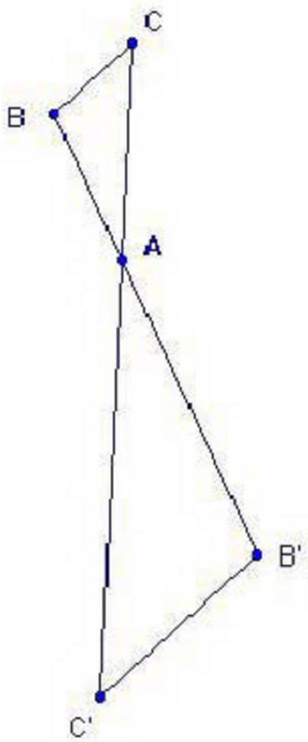
Hypothèse : (B'C') // (BC)

D'après le théorème de Thalès :
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$
Appelons r le rapport précédent.
On a AB'=r×AB et AC'=r×AC

Le triangle AB'C' est l'image du triangle ABC dans l'homothétie de centre A et de rapport k égal à r.

(pour la figure ci-contre k = 3)

Deuxième cas de figure :



Hypothèse : (B'C') // (BC)

D'après le théorème de Thalès :
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$
Appelons r le rapport précédent.
On a AB' = r×AB et AC '= r×AC

Le triangle AB'C' est l'image du triangle ABC dans l'homothétie de centre A et de rapport k avec k = -r.

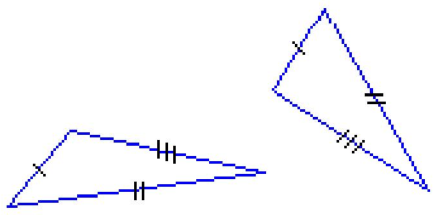
(pour la figure ci-contre k = - 2)

3°) Triangles isométriques et triangles semblables

a) Triangles isométriques (rappels : deux triangles sont isométriques quand l'un est l'image de l'autre dans une isométrie ; des triangles isométriques sont des triangles superposables)

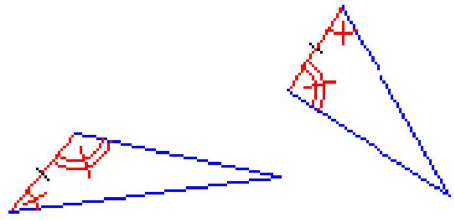
Propriété 1 :

Deux triangles ayant respectivement leurs trois côtés de même longueur sont isométriques.



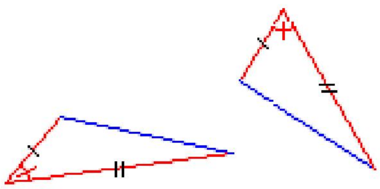
Propriété 2 :

Deux triangles ayant un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement égaux sont isométriques.



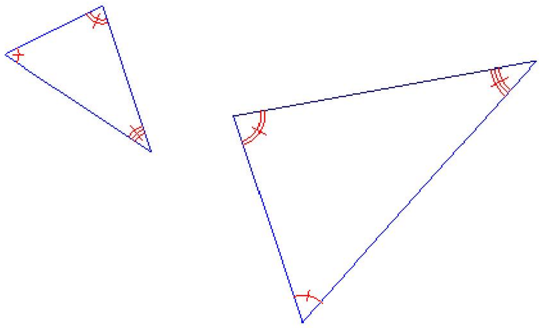
Propriété 3 :

Deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés de même longueur sont isométriques.



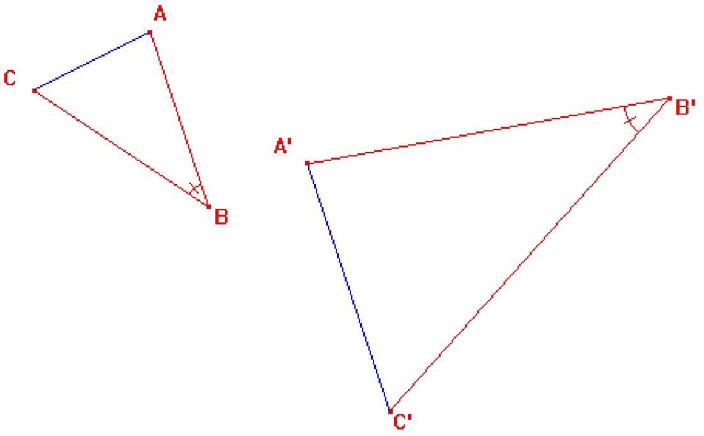
b) Triangles semblables (rappel : deux triangles sont semblables quand l'un est l'image de l'autre dans une similitude c'est-à dire quand l'un est l'image de l'autre quand on effectue une isométrie suivie d'une homothétie ; les longueurs des côtés de l'un des triangles sont proportionnelles aux longueurs des côté de l'autre triangle ; les angles des deux triangles sont égaux deux à deux).

Propriété 1 : Deux triangles ayant leurs angles respectivement égaux sont semblables.

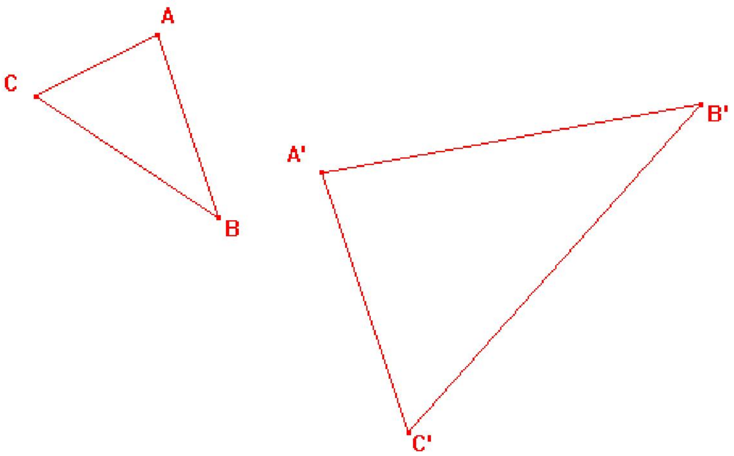


Propriété 2 : Deux triangles ayant un angle égal compris entre des côtés dont les longueurs sont proportionnelles sont semblables.

$$\frac{A'B'}{AB} | \frac{B'C'}{BC}$$



Propriété 3 : Deux triangles dont les longueurs des trois côtés sont proportionnelles sont semblables.



$$\frac{A'B'}{AB} | \frac{B'C'}{BC} | \frac{A'C'}{AC}$$